



Large Extra Dimensions

ابعاد اضافی بزرگ

ارائه دهنده: مارال موسوی
استاد راهنما: دکتر احمد قدسی



مسئله سلسله مراتب

Hierarchy problem

یکی از مشکلات بنیادی در فیزیک، که به تفاوت عظیم بین نیروهای بنیادی اشاره دارد.

نیروی گرانش >> سایر نیروهای بنیادی

نیروی هسته‌ای قوی 10^{38}

نیروی الکترومغناطیس 10^{36} برابر قوی تر از نیروی گرانش

نیروی هسته‌ای قوی 10^{25}

مقیاس پلانک 10^{19} GeV
مقیاس ضعیف 10^2 GeV

مقیاس پلانک 10^{17} برابر بزرگ تر از مقیاس ضعیف

مکانیسمی برای حل این مسئله

- مقیاس ضعیف از مقیاس بزرگ (پلانک) با **عاملی نمایی** به دست می آید.
- این مکانیسم وابسته به وجود **یک بعد اضافه** است.
- نمونه ای که می شود مطالعه کرد، دو سه غشا (3-branes) است که در فضای پنج بعدی خمیده (AdS_5) تعبیه شده است، یک برین قابل مشاهده (Visible) و یکی پنهان (Hidden) حرکت آزادانه گرانش
- حضور همه نیروهای دیگر و میدانهای مدل استاندارد در برین قابل مشاهده.

در مدل ابعاد اضافی، گرانش در تمام این ابعاد گسترش می‌یابد، و این باعث می‌شود که گرانش چهاربعدی ما، که در جهان روزمره تجربه می‌کنیم، **ضعیف‌تر** به نظر برسد.

در نتیجه، مقیاس پلانک چهاربعدی محصولی از **ابعاد بالاتر و فضای فشرده** است، که با یکدیگر تعامل دارند و به تنظیم طبیعی نیروی گرانشی در چهار بعد منجر می‌شوند.

$$M_{Pl}^2 = M^{n+2} V_n$$



مقیاس پلانک ۴-بعدی
(کاهش یافته (موثر))



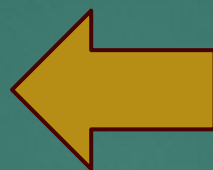
مقیاس پلانک بنیادی 4+n بعدی
(ابعاد بالاتر)



حجم فضای اضافه فشرده
(اندازه ابعاد اضافی فشرده)

$$M_{Pl}^2 = M^{n+2} V_n$$

مقیاس پلانک ۴-بعدی ثابت بماند



$\downarrow M^{n+2}$

$\uparrow V_n$ اگر
(حجم فضای فشرده)

بنابراین: [مقیاس پلانک ابعاد بالاتر به مقیاس ضعیف نزدیک می شود]

چرا در آزمایشگاه قابل مشاهده نیست؟



مقیاس
فشرده سازی

(Compactification Scale)

$$\mu_c \sim 1/V_n^{1/n}$$

متر فاکتوریزه نشده با عامل پیچش Warp factor

$$ds^2 = e^{-2kr_c\phi} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + r_c^2 d\phi^2$$



مختصات متر ۴ بعدی

$$e^{-2kr_c\phi}$$



عامل پیچش
Warp factor

ϕ : مختصات بعد اضافی
 $0 < \phi < \pi$

r_c : شعاع بعد اضافه (اندازه)

K : مقیاسی در مرتبه مقیاس پلانک

نشان می دهیم که این متر یک جواب برای معادله انیشتین است.

$$e^{-2kr_c\phi}$$

نیازی به r_c بزرگ نیست.

تغییرات کوچک در r_c ← تغییرات بزرگ در مقیاس (کاهش)

این ضریب نمایی کوچک باعث به وجود آمدن اختلاف بزرگ
بین مقیاس پلانک و مقیاس انرژی ضعیف شده است

از ویژگی‌های این مدل

$$(M_{Pl}/TeV)^{2/n}$$

برخلاف مدل‌های دیگر،

مقیاس پلانک 5 بعدی ← فقط 50 برابر مقیاس فشرده سازی نه اختلافی زیاد.

فقط یک بعد اضافی داریم، نه چند تا.

هیچ حالت Kaluza-Klein سبک و کم جرم وجود ندارد.

جرم این حالت‌های KK در حدود چند ترا الکترون ولت است، یعنی قابل بررسی در آزمایش‌های پرانرژی مثل LHC

در این مدل، گرانش در انرژی‌های پایین‌تر مثلاً (TeV) قوی می‌شود و این می‌تواند در آزمایش‌ها دیده شود. برخلاف مدل استاندارد که گرانش تا مقیاس پلانک 10^{19} (GeV) بسیار ضعیف است.

نبود مد های Kaluza-Klein سبک در مدل Randall-Sundrum



اما در مدل رندال-ساندورم، با استفاده از هندسه ی خمیده در بعد پنجم، باعث می شود که این حالت ها بسیار سنگین شوند (در حد TeV) و **حالت های سبک حذف** گردند.

- سازگاری با داده های تجربی
- جلوگیری از اختلال در رفتار ستاره ها و تابش های کیهانی
- قابل تولید در آزمایشگاه های انرژی بالا ---> مشاهده به صورت رزونانس های اسپین ۲
- توضیح اختلاف بین نیروها

The Set-Up

شرایط مرزی:

$$\phi \in [-\pi, \pi]$$

ϕ : بین 0 تا π

$S^1 / \mathbb{Z}_2$

تقارن آیندای

بعد ۵ام دایره‌ای

اگرچه دامنه کامل زاویه ϕ از π تا $-\pi$ است، اما چون **تقارن** داریم، فقط $[\pi, 0]$ کافی است.

5d

VISIBLE

HIDDEN

$\phi=0$: برین پنهان (Hidden brane)
 $\phi=\pi$: برین قابل مشاهده (Visible brane)

این برین‌ها باید با تقارن لورنتس (پوانکاره) در ۴ بعد سازگار باشند.

Bulk Metric:

$$g_{\mu\nu}^{vis}(x^\mu) \equiv G_{\mu\nu}(x^\mu, \phi = \pi), \quad g_{\mu\nu}^{hid}(x^\mu) \equiv G_{\mu\nu}(x^\mu, \phi = 0)$$

$$G_{MN}, M, N = \mu, \phi \quad \text{متر 5d}$$



متریک القایی روی برین‌ها از متریک پنج بعدی با ثابت نگه‌داشتن مختصات بعد پنجم بدست می‌آید.

Classical Actions:

$$\begin{aligned} S &= S_{gravity} + S_{vis} + S_{hid} \\ S_{gravity} &= \int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \sqrt{-G} \{-\Lambda + 2M^3 R\} \\ S_{vis} &= \int d^4x \sqrt{-g_{vis}} \{\mathcal{L}_{vis} - V_{vis}\} \\ S_{hid} &= \int d^4x \sqrt{-g_{hid}} \{\mathcal{L}_{hid} - V_{hid}\}. \end{aligned}$$



پتانسیل برین (ثابت)
که حتی در نبود برهمکنش‌های فیزیکی
نیز به عنوان منبع گرانشی عمل می‌کند.

معادله انیشتین 5 بعدی برای اکشن:

$$\delta S = 0$$

$$\delta S = \delta S_{gravity} + \delta S_{vis} + \delta S_{hid} = 0$$

انرژی و ماده متمرکز روی برین‌ها

$$\begin{aligned} \sqrt{-G} \left(R_{MN} - \frac{1}{2} G_{MN} R \right) = & -\frac{1}{4M^3} [\Lambda \sqrt{-G} G_{MN} + V_{vis} \sqrt{-g_{vis}} g_{\mu\nu}^{vis} \delta_M^\mu \delta_N^\nu \delta(\phi - \pi) \\ & + V_{hid} \sqrt{-g_{hid}} g_{\mu\nu}^{hid} \delta_M^\mu \delta_N^\nu \delta(\phi)]. \end{aligned}$$

خمیدگی فضا زمان ۵ بعدی

● تابع‌های دلتا δ بیانگر اینند که برین‌ها فقط در نقاط خاصی از بعد پنجم قرار دارند.



منجر به شرایط مرزی

جواب حدسی (Ansatz):

$$ds^2 = e^{-2\sigma(\phi)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + r_c^2 d\phi^2.$$

x_μ : چهار بعد با تقارن پوانکاره

ϕ : بعد اضافی با شعاع فشرده سازی r_c

با جایگذاری این فرم در معادله میدان اینشتین ۵ بعدی، می توان جواب های خاص یافت.

پس از orbifolding، اندازه بعد اضافی برابر با πr_c می شود. (این طول فاصله بین دو برین) ← تعیین مرزها

به دلیل تقارن پوانکاره ۴ بعدی، شعاع r_c مستقل از مختصات x_μ است.

با جایگذاری جواب حدسی (Ansatz)
در معادله انیشتین خواهیم داشت:

$$R = \frac{-20\sigma'^2 + 8\sigma''}{r_c^2}$$

با این جواب حدسی، ریچی اسکالر R و تانسور ریچی را بدست می آوریم:

$$\frac{6\sigma'^2}{r_c^2} = \frac{-\Lambda}{4M^3},$$

رابطه بین خمیدگی σ
و ثابت کیهان شناسی Λ

$$(1) \quad \frac{3\sigma''}{r_c^2} = \frac{V_{hid}}{4M^3 r_c} \delta(\phi) + \frac{V_{vis}}{4M^3 r_c} \delta(\phi - \pi).$$

این معادله از مشتق گیری در نقاط
ناپیوسته (برین ها) بدست می آید.

$$\frac{6\sigma'^2}{r_c^2} = \frac{-\Lambda}{4M^3},$$



$$\sigma = r_c |\phi| \sqrt{\frac{-\Lambda}{24M^3}}.$$

باید $\Lambda < 0$

دارای خمیدگی منفی است ← برشی از AdS_5

علت ظاهر شدن عامل نمایی

$$\sigma'(\phi) = k \times \text{sign}(\phi) \quad d/d\phi \text{ sign}(\phi) = 2 \cdot \delta(\phi)$$

$$\sigma''(\phi) = 2k \cdot [\delta(\phi) - \delta(\phi - \pi)]$$

$$K = r_c \sqrt{\frac{-\Lambda}{24M^3}}$$



مشتق دوم تابع خمیدگی فقط در
محل برین ها ناپیوسته



(2)

$$\sigma'' = 2r_c \sqrt{\frac{-\Lambda}{24M^3}} [\delta(\phi) - \delta(\phi - \pi)].$$

اثر تنش برین ها بر انحنای فضا زمان

با جایگذاری معادله (2) در معادله (1) داریم:

$$\frac{6}{r_c} K (\delta(\phi) - \delta(\phi - \pi)) = \frac{1}{4M^3 r_c} (V_{hid} \delta(\phi) + V_{vis} \delta(\phi - \pi))$$

با برابر قرار دادن ضرایب دو طرف

$$6K = \frac{V_{hid}}{4M^3} \quad \Rightarrow \quad V_{hid} = 24M^3 K$$

برای $\delta(\phi)$:

$$-6K = \frac{V_{vis}}{4M^3} \quad \Rightarrow \quad V_{vis} = -24M^3 K$$

برای $\delta(\phi - \pi)$:

$$V_{hid} = -V_{vis} = 24M^3k,$$

$$\Lambda = -24M^3k^2.$$

تنش برین‌ها باید دقیقاً این مقادیر باشد تا با خمیدگی فضای ۵بعدی (AdS_5) و تابع وارپ $\sigma(\phi)$ سازگار باشند.

تنش‌ها باعث ایجاد تابع دلتا در مشتق دوم σ می‌شوند، که دقیقاً در مرزهای $\phi=0$ و $\phi=\pi$ ظاهر می‌شود.

این روابط بین Λ و V_{hid} و V_{vis} لازم است تا در فضای ۴بعدی روی برین‌ها، ناوردایی پوانکاره حفظ شود.

پیدا کردن شکل تابع $\sigma(\phi)$

$$\sigma'^2 = k^2$$

$$\frac{6\sigma'^2}{r_c^2} = \frac{-\Lambda}{4M^3},$$

$$k^2 = \frac{-\Lambda r_c}{24M^3} \quad \left(\frac{d\sigma}{d\phi}\right)^2 = k^2 \quad \rightarrow \quad \frac{d\sigma}{d\phi} = \pm k \quad \xrightarrow{\text{انتگرال}} \quad \sigma(\phi) = \pm k\phi + C$$



$$\phi \rightarrow -\phi$$

$$\sigma(\phi) = k|\phi|$$

جواب نهایی bulk metric:

$$ds^2 = e^{-2kr_c|\phi|} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + r_c^2 d\phi^2.$$

مقیاس خمیدگی

مقیاس پلانک پنج بعدی

$$k < M$$

فرض می‌کنیم که r_c کوچک است، اما هنوز بزرگ‌تر از $\frac{1}{k}$ است.

بعد پنجم قابل تشخیص
در آزمایشگاه نیست



استفاده از نظریه موثر ۴ بعدی
(four-dimensional
effective field theory)

اولین گام، شناسایی افت و خیزهای گرانشی بدون جرم (zero modes)
حول راه حل کلاسیک است.

این افت و خیزها، میدان‌های گرانشی بدون جرم را
تشکیل می‌دهند که در دنیای ما دیده می‌شوند.

فرم افت وخیزهای مد صفر:

$$ds^2 = e^{-2kT(x)|\phi|} [\eta_{\mu\nu} + \bar{h}_{\mu\nu}(x)] dx^\mu dx^\nu + T^2(x) d\phi^2. \quad *$$

افت وخیزهای تانسوری حول
فضای مینکوفسکی

همان گراویتون (ذره گرانشی بدون جرم)
در نظریه مؤثر چهاربعدی

این متریک، در هر نقطه، به صورت محلی همانند راه حل خلاً
(Vacuum Solution) است.

$$\bar{g}_{\mu\nu}(x) \equiv \eta_{\mu\nu} + \bar{h}_{\mu\nu}(x),$$

$T(x)$ ← شعاع بعد پنجم ●

$T(x)$ در فواصل کوچک ثابت ← locally Minkowskian ●

جرم میدان T باید حداقل $10^{-4} eV$ باشد ●

$$T \longrightarrow r_c$$

جایگذاری * در اکشن‌هایی که داشتیم:

گرانش در جهان ۴ بعدی ما را توصیف می‌کند

$$S_{eff} \supset \int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \, 2M^3 r_c e^{-2kr_c|\phi|} \sqrt{-g} \, \bar{R}$$

با جایگذاری متریک
تغییر شکل یافته در اکشن پنج‌بعدی،
نظریه مؤثر ۴ بعدی به دست می‌آید.



انتگرال گیری روی بعد پنجم (ϕ) منجر به رابطه
زیر برای ثابت پلانک می‌شود:

$$M_{Pl}^2 = M^3 r_c \int_{-\pi}^{\pi} d\phi e^{-2kr_c|\phi|} = \frac{M^3}{k} [1 - e^{-2kr_c\pi}].$$

ثابت پلانک
مؤثر ۴ بعدی

یعنی تغییرات در اندازه‌ی بعد پنجم تأثیر زیادی
بر نیروی گرانشی در چهار بعد ندارد.

kr_c بزرگ ← بستگی کم M_{pl} به r_c

For Hidden brane

$$g_{hid} = \bar{g}_{\mu\nu}$$

$$\phi=0$$

For visible brane

$$g_{\mu\nu}^{vis} = e^{-2kr_c\pi} \bar{g}_{\mu\nu}$$

$$\phi=\pi$$

با نرمال سازی مناسب میدان ها، می توانیم جرم فیزیکی ذرات در برین قابل مشاهده را از روی این متریک تعیین کنیم.

برای یک میدان هیگز بنیادی:
Fundamental Higgs field

$$S_{vis} \supset \int d^4x \sqrt{-g_{vis}} \{ g_{vis}^{\mu\nu} D_\mu H^\dagger D_\nu H - \lambda (|H|^2 - v_0^2)^2 \},$$

$$S_{vis} \supset \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} e^{-4kr_c\pi} \{ \bar{g}^{\mu\nu} e^{2kr_c\pi} D_\mu H^\dagger D_\nu H - \lambda (|H|^2 - v_0^2)^2 \},$$

$$H \rightarrow e^{kr_c\pi} H$$

$$S_{eff} \supset \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \{ \bar{g}^{\mu\nu} D_\mu H^\dagger D_\nu H - \lambda (|H|^2 - e^{-2kr_c\pi} v_0^2)^2 \}.$$

نتیجه مهم:

$$v \equiv e^{-kr_c\pi} v_0.$$

جرم‌هایی که ما در دنیای فیزیکی مشاهده می‌کنیم (مثل جرم هیگز یا سایر ذرات)، از مقیاسی بدست می‌آیند که در آن، تقارن با عامل نمایی شکسته می‌شود.

$$m \equiv e^{-kr_c\pi} m_0$$

هر پارامتر جرمی
در نظریه 5 بعدی

این یک نتیجه کلی است:

$$e^{kr_c\pi}$$

$$kr_c\pi \sim 35$$

Of order 10^{15}

اگر پارامتر جرمی اولیه در مقیاس پلانک باشد مثلاً
($m_0 \sim 10^{19}$ GeV)
جرم فیزیکی حاصل شده

$$m \sim 10^{-15} \times 10^{19} \\ = 10^4 \text{ GeV} = 10 \text{ TeV}$$

نکته مهم این است که برای رسیدن به این کاهش بزرگ در جرم‌ها، لازم نیست مقادیر k ، r_c ، یا M خیلی با هم متفاوت باشند.

فقط کافیست $kr_c \sim 50$

می‌توانیم برعکس فرض کنیم:

مقیاس کوچک‌تر، مثل انرژی
ذرات، مقدار اصلی باشد، و
بزرگی گرانج فقط نتیجه‌ی
هندسه‌ی فضا-زمان باشد

مقیاس‌های کوچک‌تر مثل انرژی
ذرات از آن مشتق می‌شوند.

فرض کردیم که مقیاس گرانج در
حدود پلانک، مقدار بنیادیست

یعنی گرانج در اصل قوی باشد اما با brane قابل مشاهده همپوشانی کمی داشته باشد

در برین ما، گرانج ضعیف

ولی در مدل رندال-ساندروم تعداد حالت های انرژی کم،
فاصله بین آنها زیاد



قدرت کاپلینگ هر حالت با میدان گرانشی بسیار قوی



$$\text{Energy/TeV}$$

هرحالت به تنهایی قابل آشکارسازی است

در مدل های ساده، حالت های برانگیخته (مثل گراویتون های سبک) بسیار زیادند،
چون فاصله ی انرژی بین آنها بسیار کم است



اما قدرت کاپلینگ این حالت ها با میدان گرانشی بسیار ضعیف است



$$\sim \text{Energy}/M_{Pl}$$

هرحالت به تنهایی قابل آشکارسازی نیست

ممکن است حالت هایی ظاهر شوند که مربوط
به نظریه های پیشرفته تر بشوند.



در انرژی های بالاتر، حالت های پیچیده با میدان گرانشی کاپلینگی قوی دارند

Conclusions

در این مدل، جهان ما به صورت یک ۳-برین در فضای پنج بعدی در نظر گرفته می شود
این ستاپ از دو ۳-برین در نقاط مشخص فضای پنج بعدی تشکیل شده است.

راه حلی برای مسئله
سلسله مراتب



مقیاس های انرژی، مانند مقیاس ضعیف و مقیاس پلانک، به صورت نمایی و بدون نیاز به
فشرده سازی شدید ایجاد می شود.

در این مدل، مقدارهای فیزیکی مانند جرم ها از پارامترهای اولیه ی بزرگ به صورت
هندسی کاهش می یابند و این کاهش می تواند مسئله ی اختلاف مقیاس ها را حل کند.

نکته ی مهم این است که این نظریه قابل آزمون تجربی است.

منابع :

Resources

Randall, L., & Sundrum, R
A Large Mass Hierarchy from a Small Extra Dimension,
Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 3370–3373

An Alternative to Compactification,
Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 4690–4693