کوانتش هندسی و کاربرد آن در گرانش AdS_3

نگارنده: محبوبه عباسی

استاد راهنما: دکتر حمیدرضا افشار

دانشگاه فردوسی مشهد

تابستان 1403

فهرست مطالب

قضیه

(قضیه نمایش تقارن ویگنر) فرض کنیم $\mathcal{S} : \mathbb{P}\mathscr{H} \to \mathbb{P}\mathscr{H}$ یک تقارن باشد. در این صورت $\mathcal{S}[\Psi] = [\widehat{U} \cdot \Psi]$ که در آن $\widehat{U} : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ یک عملگر خطی یکانی یا یک عملگر پادخطی پادیکانی است. علاوه بر این، اگر $\widehat{V} : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ عملگر دیگری باشد به طوری که برای هر $[\Psi] \in \mathbb{P}\mathscr{H}$، $\mathcal{S}[\Psi] = [\widehat{V} \cdot \Psi]$، آنگاه $\widehat{V} = e^{i\theta}\widehat{U}$ برای یک $\theta \in \mathbb{R}$.

تعریف

یک نمایش از گروه G در فضای برداری مختلط $\mathbb{V}$، یک همریختی گروهی $\mathcal{T}: G \to \mathrm{GL}(\mathbb{V})$ است.

تعریف

فرض کنیم $\mathscr{H}$ یک فضای هیلبرت مختلط باشد. نمایش $\mathcal{T}: G \to GL(\mathscr{H})$ از G را یک نمایش یکانی می‌نامیم هرگاه برای هر $f \in G$، $\mathcal{T}(f)$ یک عملگر یکانی باشد. به عبارت دیگر، یک نمایش یکانی، یک همریختی $\mathcal{T}: G \to U(\mathscr{H})$ است.

گزاره

اگر $\mathcal{T}_C : G \to PU(\mathscr{H})$ یک نمایش افکنشی باشد، آنگاه تابع هموار $C : G \times G \to \mathbb{R}$ در شرط 2ـ هم‌دور

$$C(f, gh) + C(g, h) = C(fg, h) + C(f, g), \quad \forall f, g \in G$$

صدق می‌کند. به عبارت دیگر، $[C] \in \mathcal{H}^{2}(G; \mathbb{R})$.

الگوریتم:

(1) همبندی گروه لی مدنظر را بررسی کرده و مولفه همانی آن (که با G نشان می‌دهیم) را پیدا می‌کنیم.

(2) گروه بنیادین G را محاسبه کرده و پوشش جهانی آن (که با $\widetilde{G}$ نشان می‌دهیم) را پیدا می‌کنیم.

(3) جبر لی پوشش جهانی $\widetilde{G}$ (که با $\widetilde{\mathfrak{g}}$ نشان می‌دهیم) را پیدا می‌کنیم.

(4) دومین فضای کوهمولوژی $\widetilde{\mathfrak{g}}$ را محاسبه می‌کنیم.

- اگر $\mathcal{H}^2(\widetilde{\mathfrak{g}};\mathbb{R})=0$، آنگاه یک تناظر یک به یک بین نمایش‌های یکانی افکنشی G و نمایش‌های یکانی دقیق $\widetilde{G}$ (و لذا نمایش‌های یکانی دقیق $\widetilde{\mathfrak{g}}$) وجود دارد.
- اگر $\mathcal{H}^2(\widetilde{\mathfrak{g}};\mathbb{R})\cong\mathcal{H}^2(\mathfrak{g};\mathbb{R})=\langle[c]\rangle$، آنگاه $[C]\in\mathcal{H}^2(G;\mathbb{R})$ را می‌یابیم به طوری که $\delta C=c$ و گسترش مرکزی $\widehat{G}_C$ از G را پیدا می‌کنیم. در این صورت یک تناظر یک به یک بین نمایش‌های یکانی افکنشی G و نمایش‌های یکانی دقیق $\widehat{G}_C$ وجود دارد.

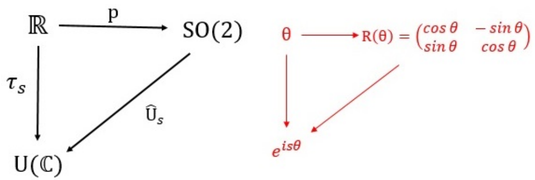
نمایش‌های گروه لی $\mathrm{SO}(2)$:

(1) $\mathrm{SO}(2)$ یک گروه لی همبند است.

(2) گروه بنیادین $\mathrm{SO}(2)$ یکریخت با $\mathbb{Z}$ و پوشش جهانی آن، $\mathbb{R}$ است.

(2) جبر لی پوشش جهانی $\mathbb{R}$ برابر $\mathbb{R}$ است.

(3) $\mathcal{H}^{۲}(\mathbb{R};\mathbb{R}) = 0$.



نمایش‌های گروه لی $\mathrm{SO}(3)$:

(1) $\mathrm{SO}(3)$ یک گروه لی همبند است.

(2) گروه بنیادین $\mathrm{SO}(3)$ یکریخت با $\mathbb{Z}_۲$ و پوشش جهانی آن، $\mathrm{SU}(۲)$ است.

(2) جبر لی $\mathfrak{su}(۲)$ دارای پایه $\{L_۱, L_۲, L_۳\}$ و روابط جابه‌جاگری $[L_i, L_j] = i\epsilon^{ijk}L_k$ است.

(3) $\mathcal{H}^۲(\mathfrak{su}(۲); \mathbb{R}) = 0$.

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{su}(2) \arrow[r, "\exp"] \arrow[d, "\hat{\mathfrak{t}}"'] & \mathrm{SU}(2) \arrow[r, "\mathrm{p}"] \arrow[d, "\hat{\mathcal{T}}"'] & \mathrm{SO}(3) \arrow[dl, "\mathcal{T}"] \\
\mathfrak{u}(\mathcal{H}) \arrow[r, "\exp"'] & \mathrm{U}(\mathcal{H}) &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\sum_{i=1}^{3} \theta_i L_i \arrow[r] \arrow[d] & \theta = e^{i \sum_{i=1}^{3} \theta_i L_i} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{p}(\theta) \arrow[dl] \\
\sum_{i=1}^{3} \theta_i \Gamma_i \arrow[r] & e^{i \sum_{i=1}^{3} \theta_i \Gamma_i} &
\end{tikzcd}$$

نمایش $\frac{۱}{۲}$ اسپین: به ازای $j = \frac{۱}{۲}$ داریم:

$$\Gamma_۱ = \frac{۱}{۲}\begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix}, \quad \Gamma_۲ = \frac{۱}{۲}\begin{pmatrix} ۰ & -i \\ i & ۰ \end{pmatrix}, \quad \Gamma_۳ = \frac{۱}{۲}\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{pmatrix}$$

در این صورت داریم:

$$\widehat{\mathcal{T}}_{\frac{۱}{۲}}(e^{i\theta L_۳}) = e^{i\theta \Gamma_۳} = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\theta}{۲}} & ۰ \\ ۰ & e^{-i\frac{\theta}{۲}} \end{pmatrix}.$$

به ازای $\theta_۱$ و $\theta_۲$ به طوری که $\theta_۱ + \theta_۲ = ۲\pi$ خواهیم داشت:

$$\widehat{\mathcal{T}}_{\frac{۱}{۲}}(e^{i\theta_۱ L_۳})\widehat{\mathcal{T}}_{\frac{۱}{۲}}(e^{i\theta_۲ L_۳}) = \begin{pmatrix} e^{i\frac{(\theta_۱+\theta_۲)}{۲}} & ۰ \\ ۰ & e^{-i\frac{(\theta_۱+\theta_۲)}{۲}} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} = -I_{۲\times۲}.$$

تعریف

فرض کنیم $\mathcal{M}$ یک خمینه، G یک گروه لی که به طور تراگذری روی $\mathcal{M}$ عمل می‌کند، μ یک اندازه شبه Gـناوردا روی $\mathcal{M}$، $\mathcal{M}$، $p \in \mathcal{M}$،

$$\mathcal{S} : G_p \to GL(\mathcal{E})$$

یک نمایش یکانی از G_p در فضای هیلبرت $\mathcal{E}$ و $g : \mathcal{M} \to G$ یک خانواده پیوسته از خیزهای استاندارد روی $\mathcal{M}$ باشد. نگاشت

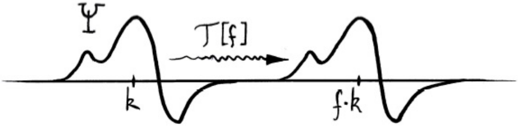
$$\mathcal{T} : G \to \mathrm{GL}(L^{2}(\mathcal{M}, \mu, \mathcal{E}))$$

با ضابطه زیر را نمایش القایی از G توسط $\mathcal{S}$ می‌نامیم:

$$(\mathcal{T}(f) \cdot \Psi)(q) = \sqrt{\rho_{f^{-1}}(q)}\,\mathcal{S}(g_q^{-1} f g_{f^{-1}\cdot q}) \cdot \Psi(f^{-1} \cdot q)$$

در صورتی که اندازه شبه Gـناوردای μ ناوردا باشد، آنگاه نمایش $\mathcal{T}$ به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$(\mathcal{T}(f)\cdot\Psi)(q) \equiv \Psi(f^{-۱}\cdot q).$$



تعریف

فرض کنیم G یک گروه لی، A یک گروه برداری و $\sigma : G \to GL(A)$ یک نمایش از G در A باشد. حاصلضرب نیمه‌مستقیم G و A نسبت به σ، گروه

$$G \ltimes_\sigma A \equiv G \times A \quad (\text{به عنوان مجموعه})$$

با عمل دوتایی

$$(f, \alpha) \cdot (g, \beta) \equiv (fg, \alpha + \sigma_f(\beta))$$

است. اعضای G را دوران‌ها یا خیزها و اعضای A را انتقال‌ها می‌نامیم.

تعریف

فرض کنیم

$$\mathcal{R} : G_p \to \mathrm{GL}(\mathcal{E})$$

یک نمایش یکانی کاهش‌ناپذیر از G_p در یک فضای هیلبرت $\mathcal{E}$ باشد. نمایش القایی

$$\mathcal{T} : G \ltimes A \to \mathrm{GL}(L^{۲}(\mathcal{O}_p, \mu, \mathcal{E}))$$

با ضابطه

$$(\mathcal{T}((f,\alpha)) \cdot \Psi)(q) = \sqrt{\rho_{f^{-۱}}(q)}e^{i\langle q,\alpha\rangle}\Big(\mathcal{R}(g_q^{-۱} f g_{f^{-۱}\cdot q}) \cdot \Psi\Big)(f^{-۱} \cdot q)$$

را یک ذره اسپینی با اسپین $\mathcal{R}$ و مدار تکانه $\mathcal{O}_p$ می‌نامیم.

الگوریتم روش گروه کوچک:

فرض کنیم G یک گروه لی، A یک گروه برداری و $\sigma : G \to GL(A)$ یک نمایش از G در A باشد.

(1) فضای دوگان A^* را پیدا می‌کنیم.

(2) نمایش دوگان $\sigma^* : G \to \mathrm{GL}(A^*)$ را معرفی می‌کنیم.

(3) یک نماینده مدار استاندارد $p \in A^*$ معرفی کرده و مدار $\mathcal{O}_p$ را پیدا می‌کنیم.

(4) یک خانواده پیوسته از خیزهای استاندارد $\mathcal{O}_p \to G$ با ضابطه $q \mapsto g_q$ معرفی می‌کنیم که نماینده مداری p را به نقاط $\mathcal{O}_p$ وصل کند.

(5) یک اندازه شبه Gـ‌ناوردا روی $\mathcal{O}_p$ پیدا می‌کنیم.

(6) گروه کوچک G_p را پیدا می‌کنیم.

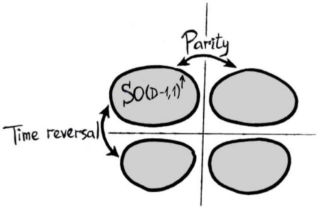
(7) نمایش اسپین $\mathcal{R} : G_p \to \mathrm{GL}(\mathcal{E})$ را پیدا می‌کنیم.

(8) نمایش القایی $\mathcal{T} : G \ltimes A \to \mathrm{GL}(L^2(\mathcal{O}_p, \mu, \mathcal{E}))$ را به صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$(\mathcal{T}((f,\alpha)) \cdot \Psi)(q) = \sqrt{\rho_{f^{-1}}(q)}\, e^{i\langle q,\alpha\rangle} \left(\mathcal{R}(g_q^{-1} f g_{f^{-1}\cdot q}) \cdot \Psi\right)(f^{-1} \cdot q).$$

تعریف

- زیرگروهی از گروه لورنتس که متشکل از ماتریس‌های لورنتس با دترمینان مثبت است را گروه لورنتس سره نامیده و با نماد $SO(D-۱,۱)$ نشان می‌دهیم.
- زیرگروهی از گروه لورنتس که متشکل از ماتریس‌های لورنتس با $f^{\circ}_{\circ}$ مثبت است را گروه لورنتس متعامد نامیده و با نماد $O(D-۱,۱)^{\uparrow}$ نشان می‌دهیم.
- زیرگروه $SO(D-۱,۱)^{\uparrow} \equiv SO(D-۱,۱) \cap O(D-۱,۱)^{\uparrow}$ را زیرگروه لورنتس سره متعامد می‌نامیم که مولفه همانی گروه لورنتس است.



تعریف

گروه پوانکاره (یا گروه لورنتس ناهمگن)، حاصلضرب نیمه‌مستقیم

$$IO(D-۱,۱)\equiv O(D-۱,۱)\ltimes_{\sigma}\mathbb{R}^{D}$$

است که در آن نمایش $\sigma : O(D-۱,۱)\to GL(\mathbb{R}^{D})$ با ضابطه $\sigma_f(\alpha)\equiv f\cdot\alpha$ تعریف می‌شود.

مولفه همانی گروه پوانکاره را گروه پوانکاره همبند می‌نامیم که به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$ISO(D-۱,۱)^{\uparrow}\equiv SO(D-۱,۱)^{\uparrow}\ltimes_{\sigma}\mathbb{R}^{D}.$$

چون متریک مینکوفسکی $(\cdot,\cdot)$ یک فرم دوخطی متقارن ناتباهیده روی $\mathbb{R}^D$ است، پس یکریختی

$$\mathcal{I}:\mathbb{R}^D\to(\mathbb{R}^D)^*:\quad \alpha\mapsto\mathcal{I}(\alpha)\equiv(\alpha,\cdot)$$

وجود دارد. در این صورت نمایش دوگان $\sigma^*:SO(D-۱,۱)\to GL\big((\mathbb{R}^D)^*\big)$ به صورت زیر خواهد بود:

$$f\mapsto\sigma_f^*:(\mathbb{R}^D)^*\to(\mathbb{R}^D)^*:\quad p\mapsto\sigma_f^*(p)\equiv f\cdot p$$

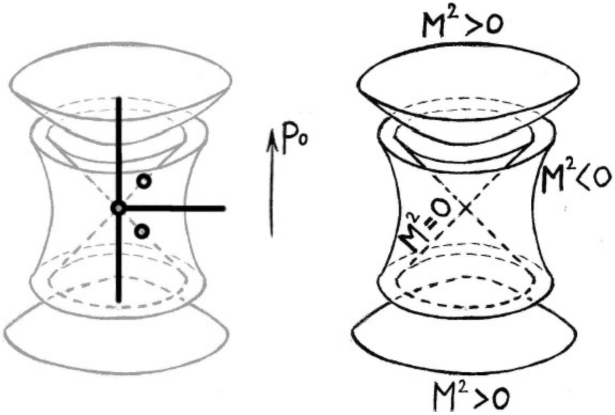
که در آن $\cdot$ ضرب ماتریسی را نشان می‌دهد.

مدار تکانه $p \in (\mathbb{R}^D)^*$ تحت عمل $SO(D-۱,۱)^\uparrow \times (\mathbb{R}^D)^* \to (\mathbb{R}^D)^*$ با ضابطه $(f,p) \mapsto \sigma_f^*(p) \equiv f \cdot p$ به صورت زیر خواهد بود:

$$\mathcal{O}_p = \{f \cdot p : f \in SO(D-۱,۱)^\uparrow\} = \{q \in \mathbb{R}^D : q_۰^۲ - \mathbf{q}^۲ = M^۲\}$$

که در آن $M^۲ \equiv -p^۲$ ثابت است.

نام مدار	نماینده مدار	مدار تکانه	گروه کوچک
مدار بدیهی	$p=0$	$\mathcal{O}_p=\{0\}$	$G_p=SO(D-1,1)^{\uparrow}$
مدار جرم‌دار با انرژی مثبت $p^2<0, \quad p_0>0$	$p=(M,0,\dots,0), M>0$	$\mathcal{O}_p\cong\mathbb{R}^{D-1}$	$G_p=SO(D-1)$
مدار جرم‌دار با انرژی منفی $p^2<0, \quad p_0<0$	$p=(M,0,\dots,0), M<0$	$\mathcal{O}_p\cong\mathbb{R}^{D-1}$	$G_p=SO(D-1)$
مدار بدون جرم با انرژی مثبت $p^2=0, \quad p_0>0$	$p=(E,E,0,\dots,0), E>0$	$\mathcal{O}_p\cong\mathbb{R}\times S^{D-2}$	$G_p=SO(D-2)\ltimes\mathbb{R}^{D-2}$
مدار بدون جرم با انرژی منفی $p^2=0, \quad p_0<0$	$p=(E,E,0,\dots,0), E<0$	$\mathcal{O}_p\cong\mathbb{R}\times S^{D-2}$	$G_p=SO(D-2)\ltimes\mathbb{R}^{D-2}$
مدار تاکیونیک $p^2>0$	$p=\left(0,\dots,0,\sqrt{-M^2}\right)$	$\mathcal{O}_p\cong\mathbb{R}\times S^{D-2}$	$G_p=SO(D-2,1)^{\uparrow}$


P_0
$M^2>0$
$M^2<0$
$M^2=0$
$M^2>0$

تعریف

(**خلأ**) نمایش خلأ گروه پوانکاره، نمایشی با مدار بدیهی است؛ یعنی $p = 0$، $\mathcal{O}_p = \{0\}$ و $G_p = SO(D-1,1)^{\uparrow}$. نمایش اسپین، نمایش یکانی کاهش‌ناپذیر

$$\mathcal{R} : SO(D-1,1)^{\uparrow} \to \mathrm{GL}(\mathcal{E})$$

است. در این صورت نمایش القایی $\mathcal{T} : G \ltimes A \to \mathrm{GL}(L^2(\mathcal{O}_p, \mu, \mathcal{E}))$ به صورت زیر خواهد بود:

$$(\mathcal{T}(f,\alpha)\cdot\Psi)(q) = \Big(\mathcal{R}(g_q^{-1} f g_{f^{-1}\cdot q})\cdot\Psi\Big)(f^{-1}\cdot q).$$

یک خانواده پیوسته $q \mapsto g_q$ از خیزهای استاندارد برای ذره‌های جرم‌دار به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$g_q = \begin{pmatrix} \sqrt{1 + \mathbf{q}^2/M^2} & q_j/M \\ q_i/M & \delta_{ij} + \frac{q_i q_j}{\mathbf{q}^2}\left(\sqrt{1 + \mathbf{q}^2/M^2} - 1\right) \end{pmatrix}$$

به طوری که

$$g_q \cdot p = (\sqrt{M^2 + \mathbf{q}^2}, \mathbf{q}).$$

یک اندازه لورنتس‌ـناوردا روی $\mathcal{O}_p \cong \mathbb{R}^{D-1}$ به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$d\mu(\mathbf{q}) = \frac{d^{D-1}\mathbf{q}}{\sqrt{M^2 + \mathbf{q}^2}}$$

که در آن $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_D) \in \mathbb{R}^{D-1}$ تکانه فضایی است.

تعریف

(**ذره‌های جرم‌دار**) تکانه‌های یک ذره جرم‌دار با جرم M، مدار $\mathcal{O}_p \cong \mathbb{R}^{D-1}$ با گروه کوچک $SO(D-1)$ را تولید می‌کنند. نمایش اسپین، نمایش یکانی کاهش‌ناپذیر

$$\mathcal{R} : SO(D-1) \to \mathrm{GL}(\mathcal{E})$$

است که توسط ساختار با بیشترین وزن مشخص می‌شود.

تعریف

گروه گالیله Dـبُعدی، حاصلضرب نیمه‌مستقیم

$$\left(O(D-1)\ltimes_{\sigma_1}\mathbb{R}^{D-1}\right)\ltimes_{\sigma_2}\left(\mathbb{R}^{D-1}\times\mathbb{R}\right)$$

است که در آن دوران‌ها روی خیزها به صورت

$$(\sigma_1)_f(\mathbf{v})\equiv f\cdot\mathbf{v}$$

و دوران‌ها و خیزها روی انتقال‌ها به صورت

$$(\sigma_2)_{(f,\mathbf{v})}(\boldsymbol{\alpha},t)\equiv(f\cdot\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{v}t,t).$$

عمل می‌کنند.

تعریف

گروه بارگمن Dـبُعدی، حاصلضرب نیمه‌مستقیم

$$\left(O(D-۱)\ltimes\mathbb{R}^{D-۱}\right)\ltimes_{\sigma}\left(\mathbb{R}^{D-۱}\times\mathbb{R}\right)\times\mathbb{R}$$

است که اعضای آن به صورت $(f,\mathbf{v},\boldsymbol{\alpha},t,\lambda)$ هستند که در آن $(f,\mathbf{v},\boldsymbol{\alpha},t)$ عضوی از گروه گالیله و λ یک عدد حقیقی است و نمایش $\sigma: O(D-۱)\ltimes\mathbb{R}^{D-۱}\to\mathrm{GL}(\mathbb{R}^{D-۱}\times\mathbb{R})$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma_{(f,\mathbf{v})}(\boldsymbol{\alpha},t,\lambda)=(f\cdot\alpha+\mathbf{v}t,t,\lambda+\mathbf{v}\cdot f\cdot\boldsymbol{\alpha}+\frac{۱}{۲}\mathbf{v}^{۲}t)$$

است که در آن $\mathbf{v}^{۲}\equiv v^iv^i$ نُرم اقلیدسی است.

با در نظر گرفتن $A=\left(\mathbb{R}^{D-۱}\times\mathbb{R}\right)\times\mathbb{R}$، $G=SO(D-۱)\ltimes\mathbb{R}^{D-۱}$ و با توجه به اینکه

$$\left(\left(\mathbb{R}^{D-۱}\times\mathbb{R}\right)\times\mathbb{R}\right)^*\cong\left(\mathbb{R}^{D-۱}\times\mathbb{R}\right)\times\mathbb{R}$$

A^* متشکل از اعضایی به شکل $(\mathbf{p},E,M)$ خواهد بود که در آن $\mathbf{p}\in\mathbb{R}^{D-۱}$، $E\in\mathbb{R}$ و $M\in\mathbb{R}$.
در این صورت نمایش دوگان $\sigma^*:G\to\mathrm{GL}(A^*)$ به صورت زیر خواهد بود:

$$\sigma^*_{(f,\boldsymbol{\alpha})}(\mathbf{p},E,M)=\left(f\cdot\mathbf{p}+M\mathbf{v},E+\mathbf{v}\cdot f\cdot\mathbf{p}+\frac{۱}{۲}M\mathbf{v}^۲,M\right).$$

برای هر تکانه $(\mathbf{p},E,M)\in A^*$،

$$\mathcal{O}_{(\mathbf{p},E,M)}=\left\{\left(f\cdot\mathbf{p}+M\mathbf{v},E+\mathbf{v}\cdot f\cdot\mathbf{p}+\frac{۱}{۲}M\mathbf{v}^۲,M\right):(f,\boldsymbol{\alpha})\in SO(D-۱)\ltimes\mathbb{R}^{D-۱}\right\}.$$

نام مدار	نماینده مدار	مدار تکانه	گروه کوچک
مدار بدون جرم $M=0, \quad \boldsymbol{p}=0$	$p=(0,E,0)$	$\mathcal{O}_{(0,E,0)}=\{(0,E,0)\}$	$G_{(0,E,0)}=SO(D-1)\ltimes\mathbb{R}^{D-1}$
مدار بدون جرم $M=0, \quad \boldsymbol{p}\neq 0$	$p=(\boldsymbol{p},E,0)$	$\mathcal{O}_{(\boldsymbol{p},E,0)}\cong S^{D-2}\times\mathbb{R}$	$G_{(\boldsymbol{p},E,0)}=SO(D-2)\ltimes\mathbb{R}^{D-2}$
مدار جرم‌دار $M\neq 0$	$p=(0,E,M)$	$\mathcal{O}_{(0,E,M)}\cong\mathbb{R}^{D-1}$	$G_{(0,E,M)}=SO(D-1)$

ذره جرم‌دار: اسپین یک ذره گالیله جرم‌دار، نمایش یکانی کاهش‌ناپذیر

$$\mathcal{R} : SO(D-۱) \to \mathrm{GL}(\mathcal{E})$$

و قانون تبدیل حالت‌های تک‌ـذره‌ای غیرنسبیتی

$$\mathcal{T} : \left(O(D-۱) \ltimes \mathbb{R}^{D-۱}\right) \ltimes_\sigma \left(\mathbb{R}^{D-۱} \times \mathbb{R}\right) \times \mathbb{R} \to \mathrm{GL}(L^۲(\mathcal{O}_{(0,E,M)}, \mu, \mathcal{E}))$$

به صورت زیر تبدیل خواهد شد:

$$\Big(\mathcal{T}(f, \mathbf{v}, \boldsymbol{\alpha}, t, \lambda) \cdot \Psi\Big)(q) = e^{-iEt} e^{-iM\lambda} e^{-i\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\alpha} - i\mathbf{q}^۲/۲M} \mathcal{R}(f) \cdot \Psi\big((f, \mathbf{v})^{-۱} \cdot \mathbf{q}\big).$$

چون $f = g_q^{-۱} f g_{f^{-۱}\cdot q}$. که در آن خانواده پیوسته از خیزهای استاندارد روی مدار $\mathcal{O}_{(0,E,M)}$ به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$g : \mathcal{O}_{(0,E,M)} \to G : \quad \mathbf{q} \mapsto g_{\mathbf{q}} \equiv (e, \frac{\mathbf{q}}{M}).$$

تعریف

فرض کنیم $\mathcal{M}$ خمینه باشد. یک ساختار پواسن روی $\mathcal{M}$، نگاشت دوخطی پادمتقارن

$$\{\cdot,\cdot\} : C^\infty(\mathcal{M}) \times C^\infty(\mathcal{M}) \to C^\infty(\mathcal{M}) : \quad (\mathcal{F},\mathcal{G}) \mapsto \{\mathcal{F},\mathcal{G}\}$$

است که در اتحاد ژاکوبی و قاعده لایبنیتز صدق می‌کند:

$$\{\mathcal{F},\{\mathcal{G},\mathcal{H}\}\} + \{\mathcal{G},\{\mathcal{H},\mathcal{F}\}\} + \{\mathcal{H},\{\mathcal{F},\mathcal{G}\}\} = 0 \quad \text{(اتحاد ژاکوبی)}$$

$$\{\mathcal{F},\mathcal{G}\mathcal{H}\} = \{\mathcal{F},\mathcal{G}\}\mathcal{H} + \mathcal{G}\{\mathcal{F},\mathcal{H}\} \quad \text{(قاعده لایبنیتز)}$$

نگاشت $\{\cdot,\cdot\}$ را براکت پواسن روی $\mathcal{M}$ و جفت $(\mathcal{M},\{\cdot,\cdot\})$ را یک خمینه پواسن یا یک فضای فاز می‌نامیم.

تعریف

فرض کنیم $\mathcal{M}$ خمینه باشد. یک فرم همتافته روی $\mathcal{M}$، یک 2ـفرم ناتباهیده بسته ω روی $\mathcal{M}$ است. جفت $(\mathcal{M}, \omega)$ را نیز یک خمینه همتافته می‌نامیم.

- یک 2ـفرم ω روی خمینه $\mathcal{M}$، نگاشت هموار

$$p \mapsto \omega_p : T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M} \to \mathbb{R}$$

است که در آن ω_p دوخطی پادمتقارن است.

- گوییم ω یک فرم بسته است هرگاه $d\omega = 0$ که در آن d مشتق خارجی است.
- گوییم ω یک فرم ناتباهیده است هرگاه برای هر $p \in \mathcal{M}$، ω_p ناتباهیده باشد.

تعریف

فرض کنیم $(\mathcal{M},\omega)$ خمینه همتافته باشد. یک میدان برداری ξ روی $\mathcal{M}$ را میدان برداری هامیلتونی نامیم هرگاه $\mathcal{F}\in C^{\infty}(\mathcal{M})$ وجود داشته باشد به طوری که

$$i_{\xi}\omega=\omega(\xi,\cdot)=d\mathcal{F}.$$

در این صورت ξ را با نماد $\xi_{\mathcal{F}}$ نشان داده و آن را میدان برداری هامیلتونی نسبت به $\mathcal{F}$ می‌نامیم.

هر خمینه همتافته، یک خمینه پواسن است:

$$\{\cdot,\cdot\}:C^{\infty}(\mathcal{M})\times C^{\infty}(\mathcal{M})\to C^{\infty}(\mathcal{M}):\quad(\mathcal{F},\mathcal{G})\mapsto\{\mathcal{F},\mathcal{G}\}\equiv\omega(\xi_{\mathcal{F}},\xi_{\mathcal{G}}).$$

تعریف

فرض کنیم $(\mathcal{M}, \omega)$ خمینه همتافته باشد. دیفیومورفیسم $\phi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ را یک تقارن می‌نامیم هرگاه برای هر $p \in \mathcal{M}$،

$$\omega_p(X_p, Y_p) = \omega_{\phi(p)}(\phi_{*p}(X_p), \phi_{*p}(Y_p)), \quad \forall X_p, Y_p \in T_p\mathcal{M}.$$

تعریف

فرض کنیم $(\mathcal{M}, \omega)$ یک خمینه همتافته باشد. عمل هموار $G \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ را یک عمل همتافته گوییم هرگاه برای هر $f \in G$، دیفیومورفیسم $\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ با ضابطه $q \mapsto f \cdot q$ یک تقارن باشد. در این صورت گوییم $\mathcal{M}$ یک فضای فازی دارای تقارن با گروه تقارن G است.

تعریف

مولد بی‌نهایت کوچک عمل $G \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ متناظر با $X \in \mathfrak{g}$، میدان برداری ξ_X روی $\mathcal{M}$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\xi_X : \mathcal{M} \to T\mathcal{M} : \quad q \mapsto (\xi_X)_q \equiv \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (e^{tX} \cdot q).$$

تعریف

یک نگاشت تکانه برای عمل همتافته $G \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$، نگاشت هموار

$$\mathcal{J} : \mathcal{M} \to \mathfrak{g}^* : \quad p \mapsto \mathcal{J}(p)$$

است به طوری که برای هر $X \in \mathfrak{g}$،

$$\omega(\xi_X, \cdot) = d\langle \mathcal{J}(\cdot), X \rangle,$$

که در آن

$$\mathcal{J}_X \equiv \langle \mathcal{J}(\cdot), X \rangle : \mathcal{M} \to \mathbb{R} : \quad q \mapsto \langle \mathcal{J}(q), X \rangle$$

یک تابع حقیقی‌ـمقدار روی $\mathcal{M}$ است. در صورتی که عمل همتافته دارای نگاشت تکانه باشد، آن را یک عمل هامیلتونی می‌نامیم. توجه کنیم که $\xi_X = \xi_{\mathcal{J}_X} = \{\cdot, \mathcal{J}_X\}$.

گزاره

فرض کنیم $G \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ یک عمل هامیلتونی باشد. در این صورت، نمایش یکانی کلاسیک (افکنشی) $\mathfrak{g} \to C^{\infty}(\mathcal{M})$ با ضابطه $X \mapsto \mathcal{J}_X$ وجود دارد؛ یعنی برای هر $X, Y \in \mathfrak{g}$،

$$\{\mathcal{J}_X, \mathcal{J}_Y\} = \mathcal{J}_{[X,Y]} + c(X, Y)$$

که در آن $[c] \in \mathcal{H}^{۲}(\mathfrak{g}; \mathbb{R})$.

(نمایش الحاقی)

$$Ad : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$$

$$X \mapsto Ad_f(X) \equiv \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left(f e^{tX} f^{-1}\right)$$

$\Rightarrow$ (نمایش هم‌الحاقی)

$$Ad^* : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g}^*)$$

$$p \mapsto Ad_f^*(p) \equiv p \circ Ad_{f^{-1}}$$

$\Rightarrow$ (عمل هم‌الحاقی)

$$G \times \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$$

$$(f,p) \mapsto f \cdot p \equiv Ad_f^*(p)$$

$\Rightarrow$ (مدار هم‌الحاقی)

$$\mathcal{W}_p = \{Ad_f^*(p) : f \in G\}$$

$\Rightarrow$ (فضای مماس مدار هم‌الحاقی)

$$T_q\mathcal{W}_p = \{ad_X^*(q) : X \in \mathfrak{g}\}$$

$\Rightarrow$ (فرم همتافته کریلوف-کاستنت)

$$q \mapsto \omega_q : T_q\mathcal{W}_q \times T_q\mathcal{W}_q \to \mathbb{R}$$

$$\omega_q\left(ad_X^*(q), ad_Y^*(q)\right) \equiv \langle q, [X,Y]\rangle$$

$\Rightarrow$ (عمل همتافته)

$$G \times \mathcal{W}_p \to \mathcal{W}_p$$

$$(f,p) \mapsto f \cdot p = Ad_f^*(p)$$

$\Rightarrow$ (نگاشت تکانه)

$$\mathcal{J} : \mathcal{W}_p \hookrightarrow \mathfrak{g}^*$$

$$q \mapsto q$$

$\Rightarrow$ (عمل هامیلتونی)

$$G \times \mathcal{W}_p \to \mathcal{W}_p$$

$$(f,p) \mapsto f \cdot p = Ad_f^*(p)$$

$\Rightarrow$ (نمایش یکانی دقیق کلاسیک)

$$\mathfrak{g} \to C^\infty(\mathcal{W}_p)$$

$$X \mapsto \mathcal{J}_X$$

تعریف

کوانتش هندسی یک فضای فاز $(\mathcal{M}, \{\cdot,\cdot\})$، تخصیص فضای هیلبرت $\mathscr{H}$ از توابع موج انتگرال‌پذیر مربعی روی $\mathcal{M}$ به آن است به طوری که در شرایط زیر صدق کند:

(1) تبدیل خطی $C^{\infty}(\mathcal{M}) \to \mathrm{End}(\mathscr{H})$ با ضابطه $\mathcal{F} \mapsto \widehat{\mathcal{F}}$ وجود داشته باشد.

(2) برای هر $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in C^{\infty}(M)$، $[\widehat{\mathcal{F}}, \widehat{\mathcal{G}}] = i\hbar\{\widehat{\mathcal{F}, \mathcal{G}}\}$.

(3) تابع ثابت $\mathcal{F}(p) = ۱$ به عملگر همانی $\widehat{۱} = \mathrm{id}_{\mathscr{H}}$ نظیر شود.

گزاره

اگر $(\mathcal{M}, \omega)$ یک خمینه همتافته با فرم همتافته دقیق $(\omega = -d\theta)$ باشد، آنگاه تبدیل خطی

$$\mathcal{F} \mapsto \widehat{\mathcal{F}} = -i\hbar\xi_{\mathcal{F}} - \langle\theta, \xi_{\mathcal{F}}\rangle + \mathcal{F}$$

یک کوانتش هندسی فراهم می‌آورد.

قضیه

اگر خمینه همتافته $(\mathcal{M},\omega)$ در شرط

$$[\frac{\omega}{2\pi\hbar}]\in\mathcal{H}^{2}_{\text{de Rham}}(\mathcal{M},\mathbb{Z}).$$

صدق کند (یا به طور معادل، انتگرال $\frac{\omega}{2\pi\hbar}$ روی هر سطح دو بُعدی بسته یک عدد صحیح باشد)، آنگاه قابل کوانتش خواهد بود.

مسئله: فرض کنیم $(\mathcal{M}, \omega)$ یک خمینه همتافته قابل کوانتش با گروه تقارن G و نگاشت تکانه $\mathcal{J} : \mathcal{M} \to \mathfrak{g}^*$ باشد. آیا کوانتش هندسی می‌تواند نمایش‌های یکانی کاهش‌ناپذیر از G تولید کند؟

گزاره

نگاشت $\mathfrak{t} : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathscr{H})$ با ضابطه $X \mapsto \widehat{\mathcal{J}}_X$ ، یک نمایش یکانی (در حالت کلی افکنشی) از جبر لی $\mathfrak{g}$ است.

قضیه

اگر $\mathcal{M}$ یک فضای همگن نسبت به عمل G باشد، آنگاه همریختی $\mathfrak{t} : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathscr{H})$ با ضابطه $X \mapsto \widehat{\mathcal{J}}_X$، نمایش یکانی $\mathcal{T} : G \to \mathrm{GL}(\mathscr{H})$ را نتیجه می‌دهد. علاوه‌براین، اگر G یک گروه نیم‌ساده، فشرده یا حل‌پذیر باشد، آنگاه نمایش حاصل یک نمایش کاهش‌ناپذیر خواهد بود.

(نمایش الحاقی)

$$Ad : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$$
$$X \mapsto Ad_f(X) \equiv \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (f e^{tX} f^{-1})$$

$\Longrightarrow$ (نمایش هم‌الحاقی)

$$Ad^* : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g}^*)$$
$$p \mapsto Ad_f^*(p) \equiv p \circ Ad_{f^{-1}}$$

$\Longrightarrow$ (عمل هم‌الحاقی)

$$G \times \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$$
$$(f, p) \mapsto f \cdot p \equiv Ad_f^*(p)$$

$\Longrightarrow$ (مدار هم‌الحاقی)

$$\mathcal{W}_p = \{Ad_f^*(p) : f \in G\}$$

$\Longrightarrow$ (فضای مماس مدار هم‌الحاقی)

$$T_q\mathcal{W}_p = \{ad_X^*(q) : X \in \mathfrak{g}\}$$

$\Longrightarrow$ (فرم همتافته کریلوف-کاستنت)

$$q \mapsto \omega_q : T_q\mathcal{W}_q \times T_q\mathcal{W}_q \to \mathbb{R}$$
$$\omega_q(ad_X^*(q), ad_Y^*(q)) \equiv \langle q, [X, Y]\rangle$$

$\Longrightarrow$ (عمل همتافته)

$$G \times \mathcal{W}_p \to \mathcal{W}_p$$
$$(f, p) \mapsto f \cdot p = Ad_f^*(p)$$

$\Longrightarrow$ (نگاشت تکانه)

$$\mathcal{J} : \mathcal{W}_p \hookrightarrow \mathfrak{g}^*$$
$$q \mapsto q$$

$\Longrightarrow$ (عمل هامیلتونی)

$$G \times \mathcal{W}_p \to \mathcal{W}_p$$
$$(f, p) \mapsto f \cdot p = Ad_f^*(p)$$

$\Longrightarrow$ (نمایش یکانی دقیق کلاسیک)

$$\mathfrak{g} \to C^\infty(\mathcal{W}_p)$$
$$X \mapsto \mathcal{J}_X$$

$\Longrightarrow$ (کوانتش هندسی)

$$C^\infty(\mathcal{W}_p) \to \mathrm{End}(L^2(\mathcal{W}_p, \mu, \mathbb{C}))$$
$$\mathcal{F} \mapsto \widehat{\mathcal{F}}$$

$\Longrightarrow$ (نمایش یکانی دقیق کوانتومی)

$$\mathfrak{t} : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(L^2(\mathcal{W}_p, \mu, \mathbb{C}))$$
$$X \mapsto \widehat{\mathcal{J}}_X$$

$\Longrightarrow$ (نمایش یکانی)

$$\mathcal{T} : G \to GL(L^2(\mathcal{W}_p, \mu, \mathbb{C}))$$

تعریف

یک دیفیومورفیسم از دایره، یک نگاشت دوسویی هموار $F : S^1 \to S^1$ است که وارون آن نیز هموار است. گروه تمام چنین نگاشت‌هایی را با نماد $\mathrm{Diff}(S^1)$ نشان می‌دهیم که عمل گروهی آن، ترکیب توابع است.

یک جهت روی S^1 در نظر می‌گیریم. مجموعه دیفیومورفیسم‌هایی که جهت را حفظ می‌کنند، تشکیل یک زیرگروه از $\mathrm{Diff}(S^1)$ می‌دهند که آن را با $\mathrm{Diff}^+(S^1)$ نشان می‌دهیم و آن را گروه دیفیومورفیسم‌های حافظ جهت دایره می‌نامیم.

لم

گروه $\mathrm{Diff}^{+}(S^{۱})$ با $S^{۱}$ هموتوپ است و گروه بنیادین آن برابر $\mathbb{Z}$ است. فضای پوششی $\mathrm{Diff}^{+}(S^{۱})$ که با نماد $\widetilde{\mathrm{Diff}}^{+}(S^{۱})$ نشان داده می‌شود مجموعه دیفیومورفیسم‌هایی مانند $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ است به طوری که برای هر $\varphi\in\mathbb{R}$،

$$f'(\varphi)>۰,\qquad f(\varphi+۲\pi)=f(\varphi)+۲\pi.$$

از این پس از نماد $\mathrm{Diff}(S^{۱})$ به جای نماد دقیق‌تر $\widetilde{\mathrm{Diff}}^{+}(S^{۱})$ برای نشان دادن پوشش جهانی استفاده می‌کنیم.

گزاره

جبر لی گروه $\mathrm{Diff}(S^1)$ فضای $\mathrm{Vect}(S^1)$ از میدان‌های برداری روی S^1 است که براکت لی آن

$$[X, Y]_{\text{جبر لی}} = [X, Y]_{\text{میدان‌های برداری}}$$

داده می‌شود.

قضیه

دومین فضای کوهمولوژی حقیقی $\mathrm{Vect}(S^1)$ یک بُعدی است و توسط رده 2ـ هم‌دور گلفاندـ فاکس

$$c(X,Y) \equiv -\frac{1}{24\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi\; X(\varphi)Y'''(\varphi)$$

تولید می‌شود.

قضیه

2ـ هم‌دور بات‌ـ ترستن روی $\mathrm{Diff}(S^1)$ به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$C(f,g) \equiv -\frac{1}{48\pi}\int_{S^1} \log(f'\circ g)\, d\log(g') = -\frac{1}{48\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \log[f'\circ g(\varphi)]\frac{g''(\varphi)}{g'(\varphi)}.$$

2ـ هم‌دور بات‌ـ ترستن، انتگرال 2ـ هم‌دور گلفاند‌ـ فاکس است:

$$c(X,Y) = -\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}\Big|_{t=0,s=0}\left[C(e^{tX},e^{sY}) - C(e^{sY},e^{tX})\right].$$

به ویژه، 2ـ هم‌دور بات‌ـ ترستن نابدیهی است.

تعریف

گروه ویراسورو که با نماد $\widehat{\mathrm{Diff}}(S^1)$ نشان داده می‌شود، گسترش مرکزی جهانی $\mathrm{Diff}(S^1)$ است. این گروه با حاصلضرب $\mathrm{Diff}(S^1) \times \mathbb{R}$ دیفیومورفیک است و اعضای آن جفت‌های (f, λ) هستند که در آن $f \in \mathrm{Diff}(S^1)$ و $\lambda \in \mathbb{R}$. عمل این گروه نیز به صورت

$$(f, \lambda) \cdot (g, \mu) = (f \circ g, \lambda + \mu + C(f, g))$$

تعریف می‌شود که در آن C، 2ـهم‌دور بات‌ـترستن است.

تعریف

جبر ویراسورو، جبر لی $\widehat{\mathrm{Vect}}(S^1) = \mathrm{Vect}(S^1) \oplus \mathbb{R}$ مجهز به براکت لی زیر است:

$$[(X, \lambda), (Y, \mu)] = ([X, Y], c(X, Y))$$

که در آن $[X, Y]$ براکت لی معمول میدان‌های برداری و c نیز 2ـ هم‌دور گلفاندـ فاکس است.

نمایش الحاقی گروه ویراسورو، $\widehat{\mathrm{Diff}}(S^1)$، به صورت زیر است:

$$\widehat{Ad} : \widehat{\mathrm{Diff}}(S^1) \to \mathrm{GL}(\widehat{\mathrm{Vect}}(S^1)) : \quad f \mapsto \widehat{Ad}_f : \widehat{\mathrm{Vect}}(S^1) \to \widehat{\mathrm{Vect}}(S^1)$$

که در آن

$$\widehat{Ad}_f(X, \lambda) = \left(Ad_f X, \lambda - \frac{1}{12}\langle S[f], X\rangle\right)$$

که در آن Ad نمایش الحاقی $\mathrm{Diff}(S^1)$ و S مشتق شوارتسی است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S[f](\varphi) \equiv \frac{f'''(\varphi)}{f'(\varphi)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(\varphi)}{f'(\varphi)}\right)^2.$$

دوگان جبر لی $\widehat{\mathrm{Vect}}(S^1)$ به صورت

$$\widehat{\mathrm{Vect}}(S^1)^* = \left(\mathrm{Vect}(S^1) \oplus \mathbb{R}\right)^* = \mathrm{Vect}(S^1)^* \oplus \mathbb{R}^* = \mathcal{F}_2(S^1) \oplus \mathbb{R}$$

است. نمایش هم‌الحاقی گروه ویراسورو، $\widehat{\mathrm{Diff}}(S^1)$، به صورت زیر است:

$$\widehat{Ad}^* : \widehat{\mathrm{Diff}}(S^1) \to \mathrm{GL}(\widehat{\mathrm{Vect}}(S^1)^*) : \quad f \mapsto \widehat{Ad}_f : \widehat{\mathrm{Vect}}(S^1)^* \to \widehat{\mathrm{Vect}}(S^1)^*$$

که در آن

$$\widehat{Ad}_f^*(p, c) = \left(Ad_f^* p - \frac{c}{12} S[f^{-1}], c\right)$$

که در آن Ad^* نمایش هم‌الحاقی $\mathrm{Diff}(S^1)$ و S مشتق شوارتسی است.

فرض کنیم بردار هم‌الحاقی $(p(\varphi)d\varphi^{2}, c)$ داده شده باشد. مدار (p, c) تحت عمل $\widehat{\mathrm{Vect}}(S^1)^* \to \widehat{\mathrm{Diff}(S^1)} \times \widehat{\mathrm{Vect}}(S^1)^*$ با ضابطه $(f, (p, c)) \mapsto \widehat{Ad}_f^* p$ به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\mathcal{W}_{(p,c)} = \{\widehat{Ad}_f^* p : f \in \mathrm{Diff}(S^1)\},$$

پایدارساز G_p از p زیرگروهی از $\mathrm{Diff}(S^1)$ است به طوری که:

$$\mathcal{W}_{(p,c)} \cong \frac{\widehat{\mathrm{Diff}(S^1)}}{G_p \times \mathbb{R}} \cong \frac{\mathrm{Diff}(S^1)}{G_p}.$$

که در آن:

$$G_p = \{f \in \mathrm{Diff}(S^1) : \widehat{Ad}_f^* p = p\}$$

دانشگاه فردوسی مشهد

لم

فرض کنیم $\psi_۱$ *و* $\psi_۲$ *جواب‌های بهنجار معادله هیل* $\triangle_{(p,c)} \cdot \psi = 0$ *باشند که در آن*

$$\triangle_{(p,c)} \equiv -\frac{c}{۶}\frac{\partial^۲}{\partial\varphi^۲} + p(\varphi)$$

در این صورت یک $M \in \mathrm{SL}(۲, \mathbb{R})$ *(به نام ماتریس مونودرامی) وجود دارد به طوری که برای هر* $\varphi \in \mathbb{R}$*،*

$$\begin{pmatrix} \psi_۱(\varphi + ۲\pi) \\ \psi_۲(\varphi + ۲\pi) \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} \psi_۱(\varphi) \\ \psi_۲(\varphi) \end{pmatrix}.$$

لم

اگر $\Phi = \binom{\phi_۱}{\phi_۲}$ *بردار جواب بهنجار دیگری باشد، آنگاه به ازای یک ماتریس* $S \in \mathrm{SL}(۲, \mathbb{R})$*،* $\Psi \cdot S = \Phi$ *و در نتیجه* $M_\Phi = S M_\Psi S^{-۱}$.

تعریف

فرض کنید ψ_1 و ψ_2 جواب‌های بهنجار معادله هیل $\triangle_{(p,c)} \cdot \psi = 0$ باشند. تابع $\eta : \mathbb{R} \to S^1$ را با ضابطه $\eta(\varphi) \equiv \frac{\psi_1(\varphi)}{\psi_2(\varphi)}$ تعریف می‌کنیم. عدد پیچش $n \in \mathbb{N}$ از $\eta(\varphi)$، تعداد پیچش‌های حول دایره است که توسط η در یک بازه زمانی به طول 2π انجام می‌شود.

قضیه

فرض کنیم $c \neq ۰$ و $[M]_{(p,c)}$ و $n_{(p,c)}$ به ترتیب رده تزویجی ماتریس مونودرامی M و عدد پیچش مسیر η نظیر شده به معادله هیل $\triangle_{(p,c)} \cdot \psi = 0$ باشند. در این صورت تابع یک به یک

$$\mathbb{N} \times \{\text{رده‌های تزویجی } \mathrm{SL}(۲,\mathbb{R})\} \to \{\text{مدارهای هم‌الحاقی با بار مرکزی } c\}$$

با ضابطه

$$\mathcal{W}_{(p,c)} \mapsto \left([M]_{(p,c)}, n_{(p,c)}\right)$$

وجود دارد.

تعریف

یک ماتریس $M \in \mathrm{SL}(۲, \mathbb{R})$ را بیضی‌گون نامیم هرگاه $|Tr(M)| < ۲$، سهمی‌گون نامیم هرگاه $|Tr(M)| = ۲$ و هذلولی‌گون نامیم هرگاه $|Tr(M)| > ۲$.

لم

(خانواده بیضی‌گون) فرض کنیم M بیضی‌گون باشد. در این صورت M با ماتریس دوران یکتای

$$\begin{pmatrix} \cos(۲\pi\omega) & \sin(۲\pi\omega) \\ -\sin(۲\pi\omega) & \cos(۲\pi\omega) \end{pmatrix}$$

مزدوج است که در آن $\omega \in (۰, \frac{۱}{۲}) \cup (\frac{۱}{۲}, ۱)$.

لم

(خانواده سهمی‌گون) فرض کنیم M سهمی‌گون باشد. در این صورت M با دقیقاً یکی از شش ماتریس زیر مزدوج است:

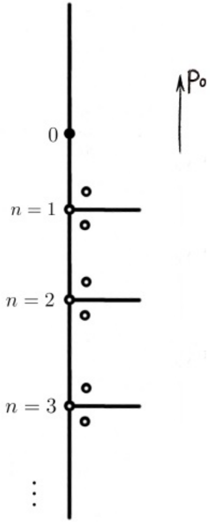
$$\pm\begin{pmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{pmatrix},\quad \pm\begin{pmatrix}۱ & ۱\\ ۰ & ۱\end{pmatrix},\quad \pm\begin{pmatrix}۱ & -۱\\ ۰ & ۱\end{pmatrix}.$$

لم

(خانواده هذلولی‌گون) فرض کنیم M هذلولی‌گون باشد. در این صورت M با یک ماتریس یکتای

$$\pm\begin{pmatrix}e^{۲\pi\omega} & ۰\\ ۰ & e^{-۲\pi\omega}\end{pmatrix}$$

مزدوج است که در آن ω یک عدد حقیقی اکیداً مثبت است.


P_0
0
$n = 1$
$n = 2$
$n = 3$
⋮

پایدارساز	مدار
$\mathrm{PSL}^{(n)}(2,\mathbb{R})$	خلأ-گونه $p_0 = -n^2c/24,\ n \geq 1$
$\mathrm{U}(1)$	بیضی‌گون
$\mathrm{U}(1)$	هذلولی‌گون بدون چرخش
$\mathrm{U}(1)$	سهمی‌گون ناتباهیده با چرخش صفر
$\mathbb{R} \times \mathbb{Z}_n$	بدون جرم با چرخش $n \geq 1$
$\mathbb{R} \times \mathbb{Z}_n$	تاکیونیک با چرخش $n \geq 1$

یک سیستم کوانتومی با فضای حالت‌های $\mathscr{H}$ و هامیلتونی $H(p)$ در نظر می‌گیریم که در آن $p \in \mathcal{M}$ و $\mathcal{M}$ یک خمینه هموار است. فرض کنیم:

- برای هر $p \in \mathcal{M}$، ویژه مقادیر $E_n(p)$ از $H(p)$ با عدد صحیح $n \in \mathbb{N}$ برچسب‌گذاری شوند.
- برای هر $p \in \mathcal{M}$، $E_n(p)$ ناتباهیده باشد و $|\psi_n(p)\rangle$ یک ویژه بردار بهنجار $H(p)$ متناظر با ویژه مقدار $E_n(p)$ باشد.
- $\gamma : [0, T] \to \mathcal{M}$ یک مسیر در $\mathcal{M}$ باشد به طوری که $\gamma(0) = p$ و تغییرات هامیلتونی $H(\gamma(t))$ با زمان بسیار آهسته (بی‌دررو) باشد.

قضیه

(قضیه بی‌دررو) اگر سیستم ابتدا در ویژه حالت $|\psi_n(p)\rangle$ قرار داشته باشد، آنگاه در هر زمان t، احتمال یافتن سیستم در ویژه حالت $|\psi_n(\gamma(t))\rangle$ برابر یک است.

در این صورت، تابع موج $|\psi(t)\rangle$ در زمان t می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$|\psi(t)\rangle = e^{i\theta_n(t)}|\psi_n(\gamma(t))\rangle$$

که در آن θ_n یک فاز حقیقی است. بنابراین:

$$\theta_n(T) = -\frac{1}{\hbar}\int_0^T dt\; E_n(\gamma(t)) + \int_0^T dt\; i\langle\psi_n(\gamma(t))|\frac{\partial}{\partial t}|\psi_n(\gamma(t))\rangle.$$

$$\theta_{n,\text{geom}} \equiv \int_0^T dt\; i\langle\psi_n(\gamma(t))|\frac{\partial}{\partial t}|\psi_n(\gamma(t))\rangle.$$

تعریف

در صورتی که مسیر γ در $\mathcal{M}$ بسته باشد، $\theta_{n,\text{geom}}$ را با $B_n(\gamma)$ نشان داده و آن را فاز بری می‌نامیم.

فرض کنیم G گروه تقارن یک سیستم کوانتومی باشد که شامل انتقال‌های زمانی است و H هامیلتونی سیستم را نشان دهد. همچنین، فرض کنیم $\mathcal{U} : G \to \mathrm{GL}(\mathscr{H})$ یک نمایش یکانی از G در فضای حالت‌های $\mathscr{H}$ باشد.

- اگر $|\phi\rangle$ یک ویژه بردار بهنجار H متناظر با ویژه مقدار E (ناتباهیده) باشد، آنگاه برای هر $f \in G$، $\mathcal{U}(f)|\phi\rangle$ یک ویژه بردار بهنجار $H(f) \equiv \mathcal{U}(f)H\mathcal{U}(f)^{-1}$ متناظر با همان ویژه مقدار E است. در این صورت هامیلتونی‌های $H(f)$ توسط اعضای $f \in G$ برچسب‌گذاری می‌شوند.
- اگر $\gamma : [0, T] \to G$ یک مسیر در G باشد به طوری که $\gamma(0) = f$، آنگاه هامیلتونی $\mathcal{U}(\gamma(t))H\mathcal{U}(\gamma(t))^{-1}$ وابسته به زمان خواهد شد. در صورتی که فرآیند بی‌دررو باشد، خواهیم داشت:

$$\theta(T) = -\frac{ET}{\hbar} + i\int_0^T dt\ \langle\phi|\mathcal{U}(\gamma(t))^\dagger \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{U}(\gamma(t))|\phi\rangle.$$

تعریف

فرض کنیم G یک گروه لی با جبر لی $\mathfrak{g}$ باشد. 1ـفرم $\mathfrak{g}$ـمقدار مارر-کارتان Θ روی G به صورت $\gamma(t)\mapsto\Theta_{\gamma(t)}$ تعریف می‌شود که در آن $\Theta_{\gamma(t)}:T_{\gamma(t)}G\to\mathfrak{g}$ یک تبدیل خطی (یک یکریختی) با ضابطه زیر است:

$$\dot{\gamma}(t)\mapsto\Theta_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t))\equiv\frac{\partial}{\partial\tau}\Big|_{\tau=t}\left(\gamma(t)^{-۱}\cdot\gamma(\tau)\right)$$

در این صورت:

$$\mathfrak{u}\left[\frac{\partial}{\partial\tau}\Big|_{\tau=t}\left(\gamma(t)^{-۱}\cdot\gamma(\tau)\right)\right]=\mathcal{U}(\gamma(t))^{-۱}\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{U}(\gamma(t)).$$

که در آن $\mathfrak{u}$ دیفرانسیل $\mathcal{U}$ در همانی است. بنابراین فاز بری نظریه گروهی به صورت زیر خواهد بود:

$$B_\phi(\gamma)=\oint_\gamma i\langle\phi|\mathfrak{u}(\Theta)|\phi\rangle.$$

فرم مارر_کارتان روی گروه ویراسورو $\widehat{\mathrm{Diff}}(S^{۱})$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\widehat{\Theta}_{(f,\alpha)}(\dot{f}(t,\cdot),\,۰) = \left(\frac{\dot{f}(t,\varphi)}{f'(t,\varphi)}\frac{\partial}{\partial\varphi},\ \frac{۱}{۴۸}\int_{۰}^{۲\pi} d\varphi\ \frac{\dot{f}(t,\varphi)}{f'(t,\varphi)}\left(\frac{f''(t,\varphi)}{f'(t,\varphi)}\right)'\right).$$

فرض کنیم $\mathfrak{U} : \widehat{\mathrm{Vect}}(S^{۱}) \to End(\mathscr{H})$ یک نمایش یکانی با بیشترین وزن از جبر ویراسورو با بار مرکزی $c > ۰$ و بیشترین وزن h باشد. فرض کنیم $|h\rangle$ ویژه بردار متناظر با بیشترین وزن h باشد. اما پایدارساز $|h\rangle$، گروه $U(۱)$ است و در نتیجه کافی است $f(۰,\cdot)^{-۱} \circ f(T,\cdot) \in U(۱)$. این یعنی $f(۰,\cdot)^{-۱} \circ f(T,\cdot)$ یک دوران با زاویه θ است:

$$f^{-۱}(۰, f(T,\varphi)) = \varphi + \theta.$$

در این صورت:

$$B_{h,c}(f) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^T dt \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\dot{f}}{f'}\Big(h - \frac{c}{24} + \frac{c}{24}(\frac{f''}{f'})'\Big) + (h - \frac{c}{24})f^{-1}(0, f(T,0)).$$

مراجع

[1] B. Oblak, BMS particles in three dimensions. Springer, 2017.

[2] B. Oblak, Berry phases on Virasoro orbits. Journal of High Energy Physics, 10 (2017) 1–35.


از توجه شما متشکرم