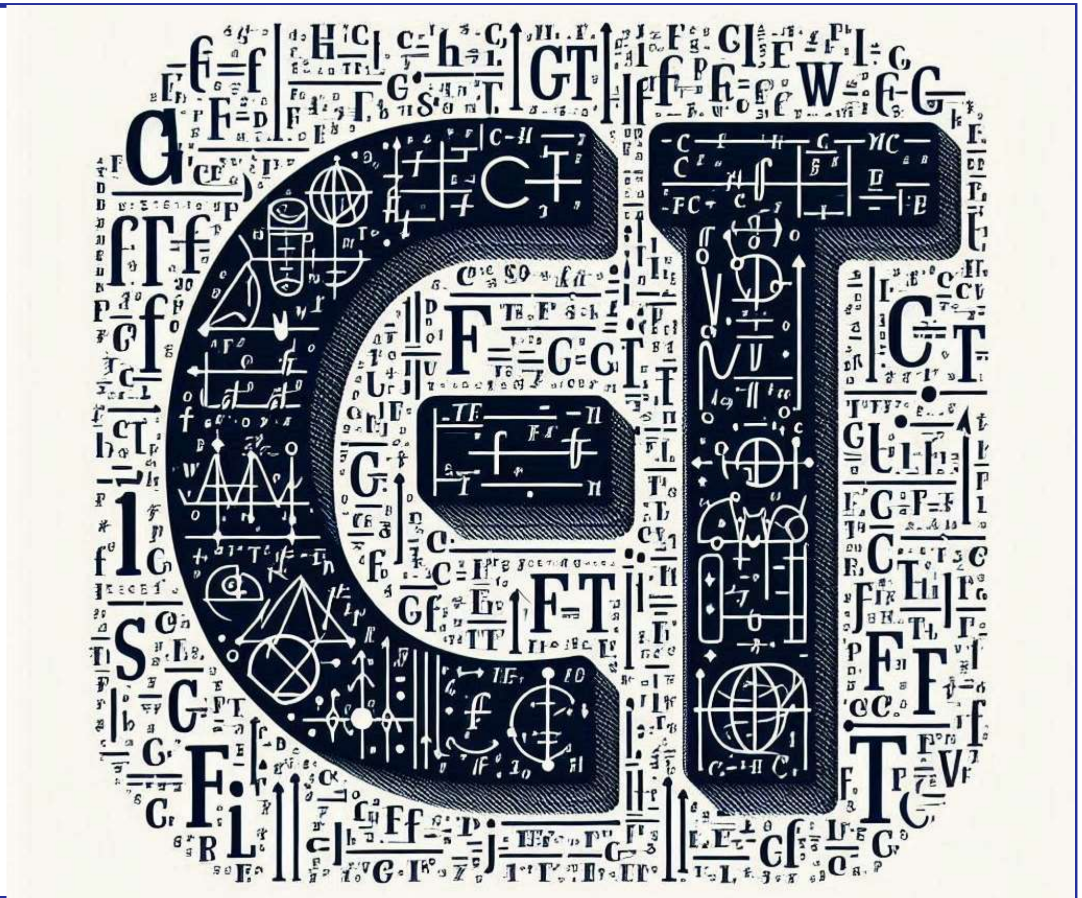
پایان نامه

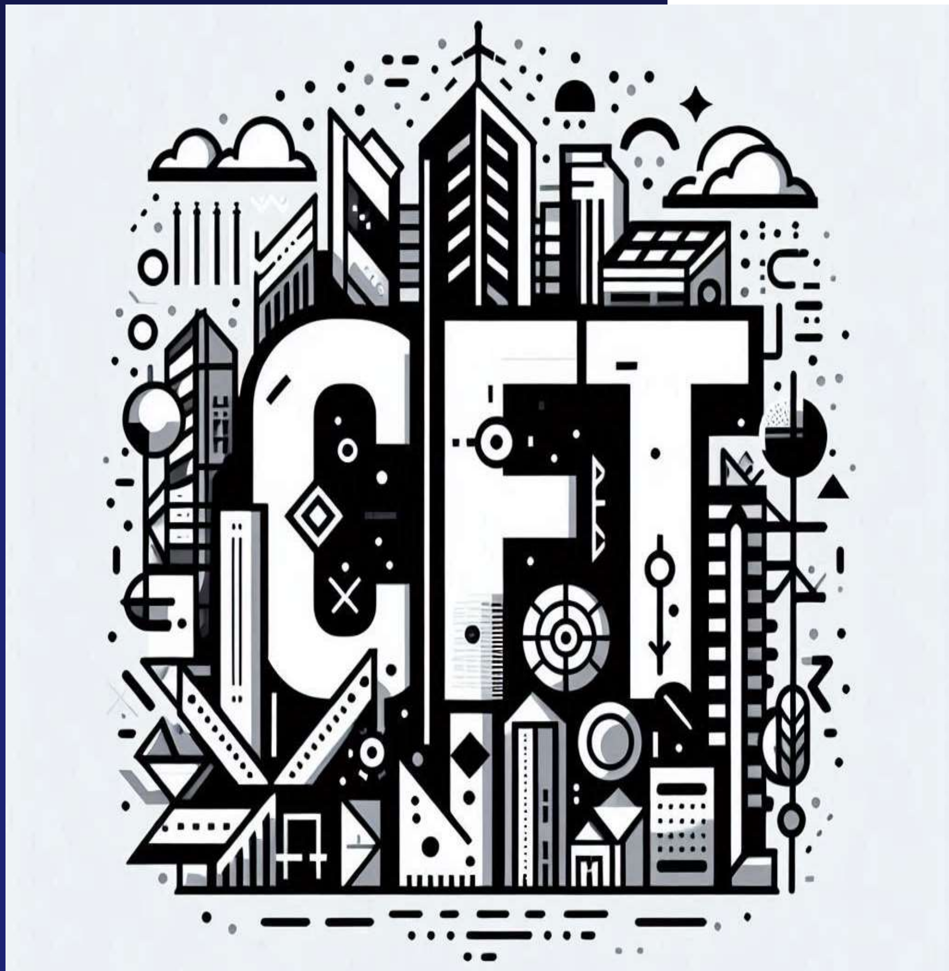
نظریه میدان‌های همدیس کلاسیک و کوانتومی

سعید باربد

استاد راهنما: دکتر احمد قدسی

۱۸ شهریور ۱۴۰۳





- معرفی گروه همدیس
- گروه همدیس در ابعاد $d \geq 3$
- گروه همدیس در $d = 2$
- کانفرمال بوت استرپ (محاسبه توابع همبستگی چهار نقطه ای)

۱

معرفی گروه همدیس

- معرفی گروه تبدیلات همدیس
- مولد های گروه همدیس
- روابط جابجایی

گروه همدیس زوایا را حفظ می‌کنند.

$$g'_{\mu\nu}(x') = \Lambda(x)\, \overbrace{g_{\mu\nu}(x)}^{\text{تانسور متریک}}$$

$$\Lambda(x) = 1$$

گروه لورنتس و یا گروه پوانکاره

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \overbrace{\epsilon^{\mu}(x)}^{\text{تبدیلات بی نهایت کوچک}}$$

$$g_{\mu\nu}(x) = ??$$

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} - (\partial_{\mu}\, \epsilon_{\nu} + \partial_{\nu}\, \epsilon_{\mu})$$

$$g_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu} - (\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu)$$

شرط همدیس بودن تبدیلات

$$\left(\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu\right) = f(x)\, g_{\mu\nu}$$

$$\left(\partial_{\mu}\,\epsilon_{\nu} + \partial_{\nu}\,\epsilon_{\mu}\right) = f(x)\,g_{\mu\nu}$$

$$f(x) = \frac{2}{d}\partial_{\rho}\epsilon^{\rho}$$

$$۲\partial_{\mu}\partial_{\nu}\epsilon_{\rho} = \eta_{\mu\rho}\partial_{\nu}f + \eta_{\nu\rho}\partial_{\mu}f - \eta_{\mu\nu}\partial_{\rho}f$$

$$f(x) = A + B_{\mu}x^{\mu}$$

$$(d-1)\partial^2 f = 0 \xrightarrow{\text{برای } d \geq 3 \text{ میتوانیم بنویسیم:}} \epsilon_{\mu} = \overbrace{a_{\mu}}^{???} + \overbrace{b_{\mu\nu}}^{???}x^{\nu} + \overbrace{c_{\mu\nu\rho}}^{???}x^{\nu}x^{\rho}$$

$$c_{\mu\nu\rho} = c_{\mu\rho\nu}$$

گروه همدیس در ابعاد $d \geq 3$

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \epsilon^{\mu}(x)$$

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu} + \alpha x^{\mu} + M^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} + 2(x \cdot b) x^{\mu} - b^{\mu} x^2$$

انتقال	$x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu}$
اتساع	$x'^{\mu} = \alpha x^{\mu}$
چرخش	$x'^{\mu} = M^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}$
تبدیل همدیس خاص (SCT)	$x'^{\mu} = \dfrac{x^{\mu} - b^{\mu} x^2}{1 - 2b \cdot x + b^2 x^2}$

Infinitesimal

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + 2(x \cdot b) x^{\mu} - b^{\mu} x^2$$

finite

$$x'^{\mu} = \frac{x^{\mu} - b^{\mu} x^2}{1 - 2b \cdot x + b^2 x^2}$$

انتقال	$P_\mu = -i\partial_\mu$
اتساع	$D = -ix^\mu\partial_\mu$
چرخش	$L_{\mu\nu} = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)$
تبدیل همدیس خاص (SCT)	$K_\mu = -i(2x_\mu x^\nu\partial_\nu - x^2\partial_\mu)$

مولد های گروه همدیس

روابط جابجایی یا جبر همدیس برای ابعاد $d \geq 3$:

$[D, P_\mu] = \mathrm{i}P_\mu$
$[D, K_\mu] = -\mathrm{i}K_\mu$
$[K_\mu, P_\nu] = 2\mathrm{i}(\eta_{\mu\nu}D - L_{\mu\nu})$
$[K_\rho, L_{\mu\nu}] = \mathrm{i}(\eta_{\rho\mu}K_\nu - \eta_{\rho\nu}K_\mu)$
$[P_\rho, L_{\mu\nu}] = \mathrm{i}(\eta_{\rho\mu}P_\nu - \eta_{\rho\nu}P_\mu)$
$[L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] = \mathrm{i}(\eta_{\nu\rho}L_{\mu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}L_{\nu\rho} - \eta_{\mu\rho}L_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma}L_{\mu\rho})$

گروه همدیس در ابعاد $d \geq 3$

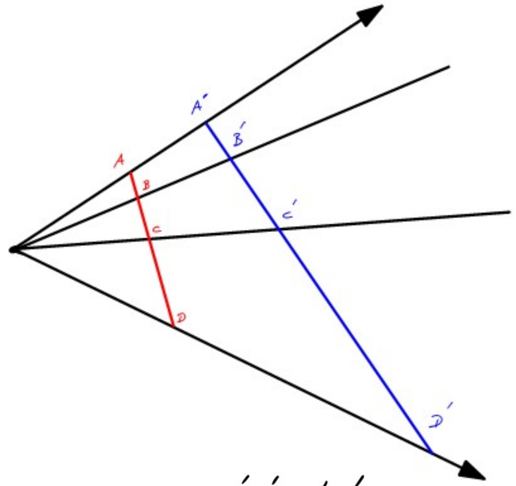
میخواهیم تابعی بسازیم که تحت همه تبدیلات همدیس ناوردا باشد.

انتقال و چرخش: $|x_i - x_j|$ $\qquad$ $|x_i' - x_j'| = |x_i - x_j|$

انتقال، چرخش و اتساع: $\dfrac{|x_i - x_j|}{|x_k - x_l|}$ $\qquad$ $\dfrac{|x_i' - x_j'|}{|x_k' - x_l'|} = \dfrac{|x_i - x_j|}{|x_k - x_l|}$

گروه همدیس برای چهار نقطه:

$$\underbrace{\frac{|\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_2}|}{|\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_3}|}\frac{|\boldsymbol{x_3} - \boldsymbol{x_4}|}{|\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_4}|} \quad \text{و} \quad \frac{|\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_2}|}{|\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_3}|}\frac{|\boldsymbol{x_3} - \boldsymbol{x_4}|}{|\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_4}|}}_{\text{نسبت های غیرهارمونیک (نسبت های متقاطع)}}$$



$$\frac{AB}{AC}\,\frac{CD}{BD} = \frac{A'B'}{A'C'}\,\frac{C'D'}{B'D'}$$

$$\frac{|x_1 - x_2|}{|x_2 - x_3|}\frac{|x_3 - x_4|}{|x_1 - x_4|} \quad \text{و} \quad \frac{|x_1 - x_2|}{|x_1 - x_3|}\frac{|x_3 - x_4|}{|x_2 - x_4|}$$

با N نقطه متمایز، $\frac{N(N-3)}{2}$ نسبت غیر هارمونیک مستقل میتوان ساخت.

گروه همدیس در ابعاد $d \geq 3$

ناوردایی همدیس در نظریه میدان های کلاسیک

- تاثیر گروه همدیس بر روی میدان های کلاسیک
- میدان های شبه اولیه
- تانسور انرژی-تکانه

گروه همدیس در ابعاد $d \geq 3$

هر یک از تبدیلات همدیس به صورت زیر میتوانند روی میدان های کلاسیک عمل کنند:

$$P_\mu \mathcal{O}(x) = -i\partial_\mu \mathcal{O}(x)$$

$$L_{\mu\nu}\mathcal{O}(x) = i\left(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu\right)\mathcal{O}(x) + S_{\mu\nu}\mathcal{O}(x) \qquad L_{\mu\nu}\mathcal{O}(0) = S_{\mu\nu}\mathcal{O}(0)$$

$$D\mathcal{O}(x) = (-ix^\nu \partial_\nu + \widetilde{\Delta})\mathcal{O}(x)$$

$$K_\mu \mathcal{O}(x) = (\kappa_\mu + 2x_\mu \widetilde{\Delta} - x^\nu S_{\mu\nu} - 2ix_\mu x^\nu \partial_\nu + ix^2 \partial_\mu)\mathcal{O}(x)$$

گروه همدیس در ابعاد $d \geq 3$

$$x' = \lambda x \longrightarrow \mathcal{O}_\Delta(x') = \lambda^{-\Delta}\mathcal{O}_\Delta(x)$$

$$\eta_{\mu\nu}\frac{\partial x'}{\partial x} = \lambda\ \eta_{\mu\nu}$$

$$\mathcal{O}_\Delta(x') = (\lambda^d)^{-\frac{\Delta}{d}}\ \mathcal{O}_\Delta(x)$$

$$\downarrow$$

$$\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right| = \lambda^d$$

میدان های شبه اولیه $\longleftarrow$ $\mathcal{O}_\Delta(x') = \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|^{-\frac{\Delta}{d}}\mathcal{O}_\Delta(x)$

گروه همدیس در ابعاد $d \geq 3$

$$\left(\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu\right) = f(x)\, g_{\mu\nu}$$

$$f(x) = \frac{2}{d} \partial_\rho \epsilon^\rho$$

کنش

$$S = \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^d x \sqrt{g} \{ g^{\mu\nu} \partial_\mu \mathcal{O} \partial_\nu \mathcal{O} \}$$

$$\delta S = \int \mathrm{d}^d x\, T^{\mu\nu} \partial_\mu \epsilon_\nu = \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^d x\, T^{\mu\nu} \left(\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu\right)$$

$$\delta S = \frac{1}{d} \int d^d x\, T^\mu{}_\mu\, \partial_\rho \epsilon^\rho$$

$T^\mu{}_\mu = 0$ $\qquad$ $\delta S = 0$

اگر رد تانسور انرژی-تکانه برابر صفر باشد، آنگاه تئوری دارای تقارن همدیس است.

گروه همدیس در ابعاد $d \geq 3$

ناوردایی همدیس در نظریه میدان های کوانتومی

- توابع همبستگی
- تابع شوینگر

گروه همدیس در ابعاد $d \geq 3$

$$\langle \mathcal{O}_{\Delta_1}(x_1)\mathcal{O}_{\Delta_2}(x_2)\rangle = ?$$

$$\langle \mathcal{O}_{\Delta_1}(x'_1)\mathcal{O}_{\Delta_2}(x'_2)\rangle = \langle \mathcal{O}'_{\Delta_1}(x'_1)\mathcal{O}'_{\Delta_2}(x'_2)\rangle$$

$x' = \lambda x$

اتساع

$\mathcal{O}_\Delta(x') = \lambda^{-\Delta}\mathcal{O}_\Delta(x)$

$$\langle \mathcal{O}_{\Delta_1}(x'_1)\mathcal{O}_{\Delta_2}(x'_2)\rangle = \lambda^{-(\Delta_1+\Delta_2)} \langle \mathcal{O}_{\Delta_1}(x_1)\mathcal{O}_{\Delta_2}(x_2)\rangle$$

انتقال و چرخش

$$\langle \mathcal{O}_{\Delta_1}(x'_1)\mathcal{O}_{\Delta_2}(x'_2)\rangle = f(|x'_1 - x'_2|)$$

$$f(|x'_1 - x'_2|) = f(\lambda|x_1 - x_2|)$$

$$f(|x'_1 - x'_2|) = \lambda^{-(\Delta_1+\Delta_2)} \; f(|x_1 - x_2|)$$

گروه همدیس در ابعاد $d \geq 3$

بنابراین $f(|x_1 - x_2|)$ باید مقدار زیر را داشته باشد

$$f(|x_1 - x_2|) = \frac{1}{|x_1 - x_2|^{(\Delta_1+\Delta_2)}}$$

انتقال، چرخش و اتساع

$$\xrightarrow{\hspace{4em}} \quad \langle \mathcal{O}_{\Delta_1}(x_1)\mathcal{O}_{\Delta_2}(x_2)\rangle = \frac{C_{12}}{|x_1 - x_2|^{(\Delta_1+\Delta_2)}}$$

حال باید ببینیم تبدیل همدیس خاص چه قیدی روی این تابع همبستگی اعمال میکند.

گروه همدیس در ابعاد $d \geq 3$

$$x'^{\mu} = \frac{x^{\mu}}{x^2}$$

تبدیل همدیس خاص برای دو نقطه

$$\mathcal{O}_{\Delta}(x') = x^{2\Delta}\mathcal{O}_{\Delta}(x)$$

$$\langle \mathcal{O}_{\Delta_1}(x_1')\mathcal{O}_{\Delta_2}(x_2')\rangle = \underbrace{x_1^{2\Delta_1}x_2^{2\Delta_2}\frac{1}{|x_1-x_2|^{(\Delta_1+\Delta_2)}}}_{\text{سمت راست معادله}}$$

$$\langle \mathcal{O}_{\Delta_1}(x_1')\mathcal{O}_{\Delta_2}(x_2')\rangle = \frac{1}{|x_1'-x_2'|^{(\Delta_1+\Delta_2)}}$$

$$\frac{1}{|x_1'-x_2'|^{(\Delta_1+\Delta_2)}} = \underbrace{(x_1x_2)^{(\Delta_1+\Delta_2)}\frac{1}{|x_1-x_2|^{(\Delta_1+\Delta_2)}}}_{\text{سمت چپ معادله}}$$

گروه همدیس در ابعاد $d \geq 3$

$$(x_1x_2)^{(\Delta_1+\Delta_2)}\frac{1}{|x_1-x_2|^{(\Delta_1+\Delta_2)}} = x_1^{2\Delta_1}x_2^{2\Delta_2}\ \frac{1}{|x_1-x_2|^{(\Delta_1+\Delta_2)}}$$

$$\langle \mathcal{O}_{\Delta_1}(x_1)\mathcal{O}_{\Delta_2}(x_2)\rangle = \frac{\delta_{\Delta_1,\Delta_2}}{|x_1-x_2|^{(\Delta_1+\Delta_2)}} = \begin{cases} \dfrac{1}{|x_1-x_2|^{2\Delta_1}} & \Delta_1 = \Delta_2 \\ 0 & \Delta_1 \neq \Delta_2 \end{cases}$$

دو میدان شبه اولیه در صورتی که بعد مقیاس یکسانی داشته باشند همبسته می‌شوند.

گروه همدیس در ابعاد $d \geq 3$

بنابراین میتوان بصورت مشابه برای یک تابع سه نقطه ای نیز تابع همبستگی را محاسبه کرد.

$$\langle \mathcal{O}_{\Delta_1}(x_1)\mathcal{O}_{\Delta_2}(x_2)\mathcal{O}_{\Delta_3}(x_3)\rangle = \frac{C_{123}}{x_{12}^{(\Delta_1+\Delta_2-\Delta_3)}x_{23}^{(\Delta_2+\Delta_3-\Delta_1)}x_{13}^{(\Delta_1+\Delta_3-\Delta_2)}}$$

$$x_{ij} = |x_i - x_j|$$

برای محاسبه تابع همبستگی چهار نقطه ای نمیتوانیم به گونه ای که برای توابع دو نقطه ای و سه نقطه ای عمل کردیم، این تابع را محاسبه کنیم. زیرا باید از نسبت های متقاطع برای حل آن استفاده کرد.

$$\langle \mathcal{O}_{\Delta_1}(x_1)\mathcal{O}_{\Delta_2}(x_2)\mathcal{O}_{\Delta_3}(x_3)\mathcal{O}_{\Delta_4}(x_4)\rangle = f\left(\frac{x_{12}x_{34}}{x_{13}x_{24}}, \frac{x_{12}x_{34}}{x_{23}x_{14}}\right)\prod_{i<j}^{4} x_{ij}^{\Delta/3-\Delta_i-\Delta_j}$$

$$S_{\mu\nu\rho\sigma}(x) = \langle T_{\mu\nu}(x) T_{\rho\sigma}(0) \rangle$$

با استفاده از تقارن ها میتوان نشان داد که:

$$\langle T^{\mu}_{\ \mu}(0)^2 \rangle = 0$$

بنابراین $T^{\mu}_{\ \mu}$ برابر صفر میشود.

گروه همدیس در ابعاد $d = 2$

- تبدیلات همدیس برای $d = 2$
- جبر ویت و ویراسورو
- میدان های اولیه و کوانتش شعاعی
- تانسور انرژی تکانه و مقدمه ای بر OPE ها
- حالت بالاترین وزن

گروه همدیس در ابعاد $d = 2$

$$\left(\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu\right) = f(x)\, g_{\mu\nu}$$

$$f(x) = \frac{2}{d} \partial_\rho \epsilon^\rho$$

$$\begin{cases} d = 2 \\ g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \mu, \nu = 0,\ 1 \end{cases}$$

$$\left(\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu\right) = \frac{2}{d} g_{\mu\nu} (\partial_\rho \epsilon^\rho)$$

$$\left.\begin{matrix} \mu = \nu = 0 \\ \mu = \nu = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \partial_0 \epsilon_0 = \partial_1 \epsilon_1$$

$$\left.\begin{matrix} \mu = 0\,, \nu = 1 \\ \mu = 1, \nu = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \partial_0 \epsilon_1 = -\partial_1 \epsilon_0$$

شرط همدیس بودن تبدیلات

حال از فضای (x^0, x^1) به فضای $(z, \bar{z})$ میرویم.

$$z = x^0 + ix^1 \quad , \quad \bar{z} = x^0 - ix^1$$

$$\partial_{\bar{z}}\epsilon = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\epsilon = 0$$

$$\partial_z\bar{\epsilon} = \frac{\partial}{\partial z}\bar{\epsilon} = 0$$

$$z \to z + \epsilon(z, \bar{z})$$

$$\bar{z} \to \bar{z} + \bar{\epsilon}(z, \bar{z})$$

$$\partial_0\epsilon_0 = \partial_1\epsilon_1$$

$$\partial_0\epsilon_1 = -\partial_1\epsilon_0$$

$$\partial_0 = \partial_z + \partial_{\bar{z}} \qquad \epsilon^0 = \frac{\epsilon + \bar{\epsilon}}{2}$$

$$\partial_1 = i(\partial_z - \partial_{\bar{z}}) \qquad \epsilon^1 = \frac{\epsilon - \bar{\epsilon}}{2i}$$

$z = x + iy \longrightarrow f(z) = u + iv$

$f(z)$ شرایط کوشی-ریمان را بر آورده میکند.

$$\boxed{\begin{aligned} u_0 &= v_1 \\ u_1 &= -v_0 \end{aligned}}$$

تابع هولومورفیک

$$f(z) = z' = z + \epsilon(z)$$

تابع آنتی هولومورفیک

$$\bar{f}(\bar{z}) = \bar{z}' = \bar{z} + \bar{\epsilon}(\bar{z})$$

گروه همدیس در $d = 2$ مجموعه همه نگاشت های تحلیلی است که این مجموعه را با سری بسط لوران میتوانیم بنویسیم.

گروه همدیس در ابعاد $d = 2$

میخواهیم مولد های گروه همدیس در $d = 2$ و جبر آن ها را پیدا کنیم.

$$z' = f(z) = z + \epsilon(z) = z + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \epsilon_n z^n$$

$$z' = f(z) = z + \epsilon(z) = z + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \epsilon_n z^n \frac{\partial z}{\partial z} = (1 + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \epsilon_n \underbrace{z^n \partial_z})z$$

$$\boxed{r_m = z^m \partial_z}$$

مولد گروه همدیس در دو بعد

$$[r_m, r_n] = (n-m) z^{m+n-1}\partial = (n-m) r_{m+n-1}$$

گروه همدیس در ابعاد $d=2$

$$[r_m, r_n] = (n-m) z^{m+n-۱}\partial = (n-m) r_{m+n-۱} \longrightarrow r_m = -l_{m-۱}$$

$$\boxed{\begin{aligned} r_m &= z^m \partial_z \\ l_m &= -z^{m+۱}\partial_z \end{aligned}}$$

$$[l_m, l_n] = (m-n) l_{m+n}$$

$$[\bar{l}_m, \bar{l}_n] = (m-n) \bar{l}_{m+n}$$

$$[\bar{l}_m, l_n] = ۰$$

جبر ویت

افزونه های مرکزی جبر ویت را مینویسیم.

$$[L_m, L_n] = (m-n)\,L_{m+n} + c p\,(m,n)$$

$$\left[\bar{L}_m, \bar{L}_n\right] = (m-n)\,\bar{L}_{m+n} + \bar{c} p\,(m,n) \qquad c \in \mathbb{C}$$

$$\left[L_m, \bar{L}_n\right] = ۰$$

$$\boxed{[L_m, L_n] = (m-n)\,L_{m+n} + \frac{c}{۱۲}\left(m^{۳} - m\right)\delta_{m+n,۰}}$$

به افزونه های مرکزی جبر ویت، جبر ویراسورو میگوییم.

گروه همدیس در ابعاد $d = 2$

یادآوری

$$\mathcal{O}_\Delta(x') = \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|^{-\frac{\Delta}{d}} \mathcal{O}_\Delta(x)$$

$$\phi(x^0, x^1) \to \phi(z, \bar{z})$$

$$h = \frac{1}{2}(\Delta + s) \qquad \bar{h} = \frac{1}{2}(\Delta - s)$$

بعد هولومورفیک همدیس

میدان های شبه اولیه

$$\phi(z, \bar{z}) \to \phi'(z, \bar{z}) = \lambda^h \bar{\lambda}^{\bar{h}} \phi(\lambda z, \bar{\lambda}\bar{z}) \qquad z \to \lambda z$$

میدان های اولیه

$$\phi(z, \bar{z}) \to \phi'(z, \bar{z}) = \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^h \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}\right)^{\bar{h}} \phi(f(z), \bar{f}(\bar{z})) \qquad z \to f(z)$$

$$\phi(f(z), \bar{f}(\bar{z})) = (\phi(z, \bar{z}) + \epsilon(z)\partial_z\phi(z, \bar{z}) + \bar{\epsilon}(\bar{z})\partial_{\bar{z}}\phi(z, \bar{z}) + \partial(\epsilon^{۲}))$$

شکل تبدیل بی نهایت کوچک میدان های اولیه تحت تبدیلات همدیس بی نهایت کوچک :

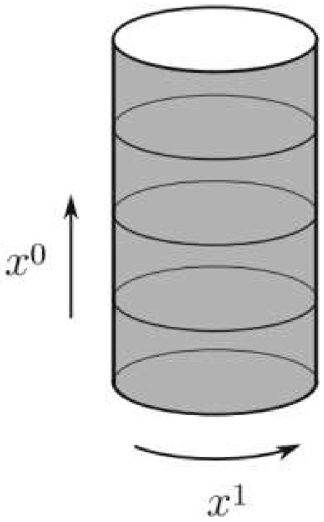
$$\phi'(z,\bar{z}) = [1 + (\epsilon(z)\partial_z + h\partial_z\epsilon(z)) + (\bar{\epsilon}(\bar{z})\partial_{\bar{z}} + \bar{h}\partial_{\bar{z}}\bar{\epsilon}(\bar{z}))]\phi(z,\bar{z})$$

$$\begin{aligned}\delta_{\epsilon,\bar{\epsilon}}\phi(z,\bar{z}) &= \phi'(z,\bar{z}) - \phi(z,\bar{z}) \\ &= ((\epsilon(z)\partial_z + h\partial_z\epsilon(z)) + \text{ anti chiral part})\phi(z,\bar{z})\end{aligned}$$

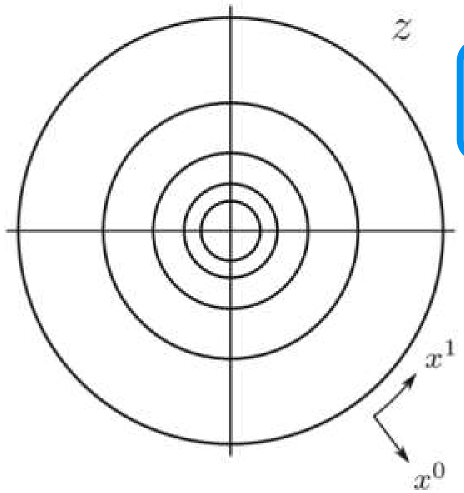
گروه همدیس در ابعاد $d = 2$

کوانتش شعاعی

$$w = x^0 + ix^1$$



$$z = e^w = e^{ix^0} e^{ix^1}$$



$z \mapsto e^a z$ انتقال زمانی $x^0 \to x^0 + a$

$z \mapsto e^{ib} z$ انتقال فضایی $x^1 \to x^1 + b$

کوانتش شعاعی

در ادامه حالت های مجانبی $|\phi\rangle$ و $\langle\phi|$ را محاسبه میکنیم.

$$\phi(w,\bar{w}) = \sum_{n,\bar{m}\in\mathbb{Z}} e^{-nw}e^{-\bar{m}\bar{w}}\phi_{n,\bar{m}}$$
$$= \sum_{n,\bar{m}\in\mathbb{Z}} z^{-n}\bar{z}^{-\bar{m}}\phi_{n,\bar{m}}$$

$$\phi(z,\bar{z}) = \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^{-h}\left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{w}}\right)^{-\bar{h}}\phi(w,\bar{w})$$
$$= z^{-h}\bar{z}^{-\bar{h}}\phi(w,\bar{w})$$

کوانتش شعاعی

$$\phi(z,\bar{z}) = \sum_{n,\bar{m}\in\mathbb{Z}} z^{-n-h}\bar{z}^{-\bar{m}-\bar{h}}\phi_{n,\bar{m}}$$

$$|\phi\rangle = \lim_{z,\bar{z}\to 0}\phi(z,\bar{z})|0\rangle$$

$$|\phi\rangle = \lim_{z,\bar{z}\to 0}\phi(z,\bar{z})|0\rangle = \phi_{-h,-\bar{h}}|0\rangle$$

$$\langle\phi| = \lim_{z,\bar{z}\to 0}\langle 0|\phi^{\dagger}(z,\bar{z})$$

$$\langle\phi| = \langle 0|\phi_{h,\bar{h}}$$

در این بخش دو نکته بررسی شده است:

- بسط ضربی عملگرها (OPE) معرفی شده است.
- نشان میدهیم تانسور انرژی تکانه یک میدان اولیه است.

$$T_{z\bar{z}} = T_{\bar{z}z} = \frac{1}{4} T^{\mu}{}_{\mu} = 0$$

$$T_{zz} = \frac{1}{4}(T_{00} - 2iT_{10} - T_{11}) = \frac{1}{2}(T_{00} - iT_{10})$$

$$T_{\bar{z}\bar{z}} = \frac{1}{4}(T_{00} + 2iT_{10} - T_{11}) = \frac{1}{2}(T_{00} + iT_{10})$$

پایستگی جریان $j_{\mu} = T_{\mu\nu}\epsilon^{\nu}$ مربوط به تقارن های همدیس، بار پایسته متناظر با این جریان را میدهد.

$$\boxed{Q = \int dx^1 J_0}$$

گروه همدیس در ابعاد $d = 2$

$$Q = \int dx^{۱} J_{۰} \qquad \delta A = [Q, A]$$

مولد تبدیلات متقارن برای عملگر A

کوانتش شعاعی

$$Q = \frac{۱}{۲\pi i} \oint_c \left(dz T(z) \epsilon(z) + d\bar{z} \bar{T}(\bar{z}) \bar{\epsilon}(\bar{z}) \right)$$

$$\delta_\epsilon \phi(w, \bar{w}) = \frac{۱}{۲\pi i} \oint_c dz \underbrace{\left[T(z) \epsilon(z), \phi(w, \bar{w}) \right]} + \frac{۱}{۲\pi i} \oint_c d\bar{z} \left[\bar{T}(\bar{z}) \bar{\epsilon}(\bar{z}), \bar{\phi}(w, \bar{w}) \right]$$

برای ضرب دو عملگر باید ترتیب زمانی برقرار باشد.

$$\delta_\epsilon \phi(w,\bar{w}) = \frac{۱}{۲\pi i}\oint_c dz\left[T(z)\epsilon(z),\phi(w,\bar{w})\right] + \frac{۱}{۲\pi i}\oint_c d\bar{z}\left[\bar{T}(\bar{z})\bar{\epsilon}(\bar{z}),\bar{\phi}(w,\bar{w})\right]$$

$$\boxed{\begin{aligned}\oint dz\left[A(z),B(w)\right] &= \oint_{|z|>|w|} dz A(z)B(w) - \oint_{|w|>|z|} dz B(w)A(z)\\ &\equiv \oint_{c(w)} dz R A(z) B(w)\end{aligned}}$$

بسط ضربی عملگرها

$$\boxed{RT(z)\phi(w,\bar{w}) = \frac{h}{(z-w)^{۲}}\phi(w,\bar{w}) + \frac{۱}{(z-w)}\partial_w\phi(w,\bar{w}) + \ldots}$$

میدان های اولیه را به صورت میدان هایی در نظر میگیریم که OPE آن با تانسور- انرژی تکانه بصورت این رابطه باشد.

بسط ضربی عملگرها

$$RT(z)\phi(w,\bar{w}) = \frac{h}{(z-w)^{۲}}\phi(w,\bar{w}) + \frac{۱}{(z-w)}\partial_w\phi(w,\bar{w}) + \ldots$$

؟؟؟؟؟

آیا تانسور انرژی-تکانه یک میدان اولیه است؟

$$T(z)T(w) = \frac{c/۲}{(z-w)^{۴}} + \frac{۲}{(z-w)^{۲}}T(w) + \frac{۱}{(z-w)}\partial_w T(w)$$

اگر $c = 0$ آنگاه تانسور انرژی تکانه یک میدان اولیه خواهد بود.

گروه همدیس در ابعاد $d = 2$

$\phi(z)$ → میدان اولیه هولومورفیک با بعد همدیس h

حالت بالاترین وزن

$$\begin{cases} L_0 |\phi\rangle = h |\phi\rangle \\ L_n |\phi\rangle = 0 \qquad n > 0 \end{cases}$$

این روابط حالتی از جبر ویراسورو است که به آن پیمانه ورما میگویند.

حالت های زیرین $\quad L_{-n_1} L_{-n_2} \ldots L_{-n_k} |\phi\rangle$

حالت های ظاهری و بدلی هستند که اهمیت فیزیکی ندارند.

مثالی از حالت های بالاترین وزن

جبر ویراسورو برای ریسمان های باز در نظریه ریسمان بوزونی:

$$(L_0 - 1)\left|\phi\right\rangle = 0 \qquad L_n \left|\phi\right\rangle = 0$$

۴۰

کانفرمال بوت استرپ

(محاسبه توابع همبستگی چهار نقطه ای)

- توابع همبستگی
- قالب های همدیس
- بسط ضربی عملگرها
- قیدهایی از یکانی بودن
- کانفرمال بلاک ها

در اسلاید های قبل توابع همبستگی دو نقطه ای و سه نقطه ای را بدست آوردیم

$$\boxed{\langle \mathcal{O}_i(x_۱)\mathcal{O}_j(x_۲)\rangle = \delta_{ij}|x_۱ - x_۲|^{-۲\Delta_i}}$$

تابع دونقطه ای فقط برای عملگرهای با بعد مقیاس یکسان، غیر صفر است.

Δ_i و C_{ijk} را داده های **CFT** می نامیم.

$$\boxed{\langle \mathcal{O}_۱(x_۱)\mathcal{O}_۲(x_۲)\mathcal{O}_۳(x_۳)\rangle = \frac{C_{۱۲۳}}{|x_{۱۲}|^{h_{۱۲۳}}|x_{۱۳}|^{h_{۱۳۲}}|x_{۲۳}|^{h_{۲۳۱}}}}$$

$$\boxed{x_{ij} \equiv x_i - x_j}$$

$$\boxed{h_{ijk} \equiv \Delta_i + \Delta_j - \Delta_k}$$

؟؟؟؟؟؟

$$\langle \mathcal{O}_{\Delta_۱}(x_۱)\mathcal{O}_{\Delta_۲}(x_۲)\mathcal{O}_{\Delta_۳}(x_۳)\mathcal{O}_{\Delta_۴}(x_۴)\rangle = f(u,v)\mathbf{K}_۴$$

$$\langle \mathcal{O}_{\Delta_1}(x_1)\mathcal{O}_{\Delta_2}(x_2)\mathcal{O}_{\Delta_3}(x_3)\mathcal{O}_{\Delta_4}(x_4)\rangle = f(u,v)\mathbf{K}_4$$

$$\mathbf{K}_4 = \frac{1}{(x_{12}^2)^{\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}}(x_{34}^2)^{\frac{\Delta_3+\Delta_4}{2}}}\left(\frac{x_{24}^2}{x_{14}^2}\right)^{\frac{\Delta_{12}}{2}}\left(\frac{x_{14}^2}{x_{13}^2}\right)^{\frac{\Delta_{34}}{2}} \qquad \Delta_{ij} \equiv \Delta_i - \Delta_j$$

$$u = \frac{x_{12}x_{34}}{x_{13}x_{24}} \qquad v = \frac{x_{12}x_{34}}{x_{23}x_{14}}$$

در ادامه میخواهیم با استفاده از **OPE** و کانفرمال بلاک ها، $f(u,v)$ را بر اساس داده های **CFT** محاسبه کنیم.

اما قبل از آن ابتدا با قالب های همدیس آشنا میشویم.

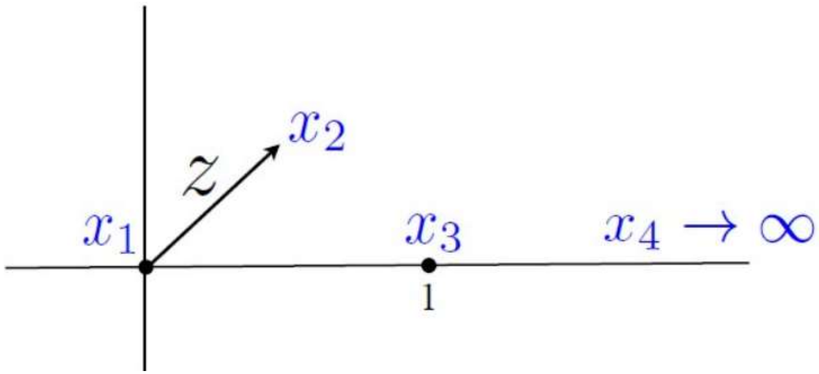
با فرض داشتن مجموعه ای از n نقطه، میتوانیم از تبدیلات همدیس برای مرتب کردن آنها در پیکربندی هــای مناســب اســتفاده کنیم.

قالب z

3 نقطه

$\hat{e}$ یک بردار واحد ثابت است. $\quad x_{۱,۲,۳} = ۰, \hat{e}, \infty$

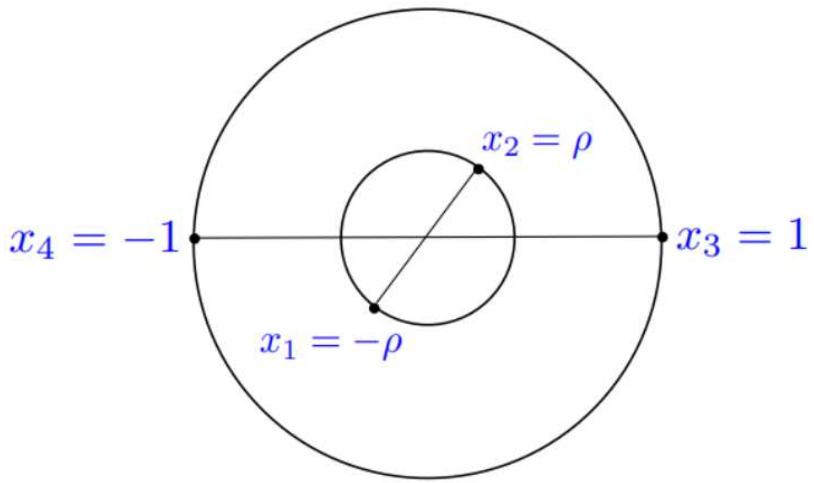
4 نقطه



$$\boxed{u = z\bar{z}} \qquad \boxed{v = (۱ - z)(۱ - \bar{z})}$$

$$z = \sigma + i\tau, \qquad \bar{z} = \sigma - i\tau$$

قالب ρ



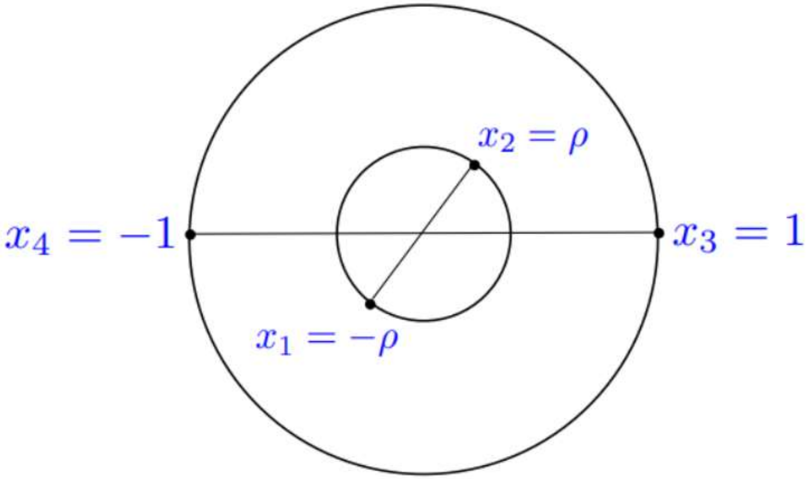
روی دایره ای به شعاع $r < 1$ هستند. $x_1 = -x_2$

روی یک دایره واحد هستند. $x_3 = -x_4$

بردار یکه هایی که x_2 و x_3 را نشان میدهند. $\mathbf{n}$ و $\mathbf{n}'$

قالب ρ

$x_1 = -x_2 \qquad x_3 = -x_4$

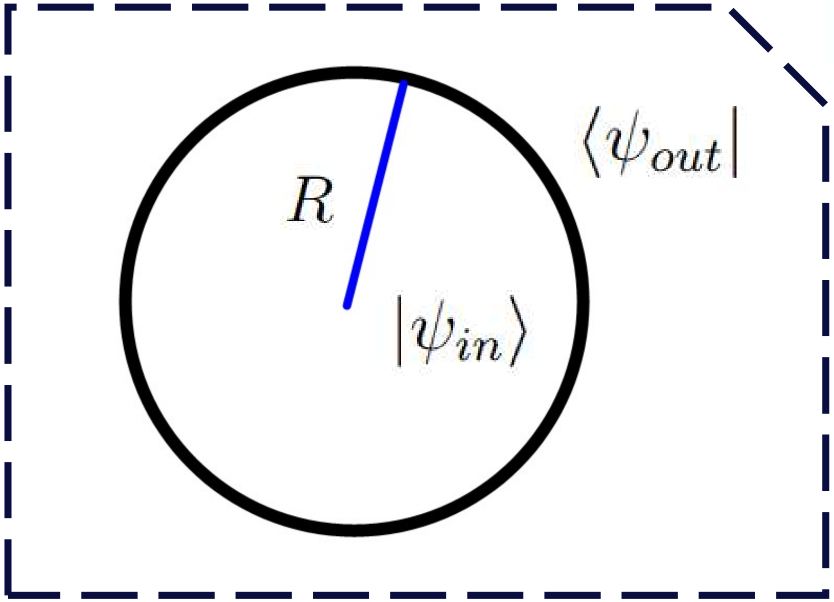


$$\rho = re^{i\theta}, \qquad \mathbf{n}.\mathbf{n}' = \cos\theta = \eta$$

$$\rho = \frac{z}{(۱-\sqrt{۱-z})^۲}, \qquad z = \frac{۴\rho}{(۱+\rho)^۲}$$

$$z = \sigma + i\tau, \qquad \bar{z} = \sigma - i\tau$$

کوانتش شعاعی $\longleftarrow \langle \psi_{out} | \psi_{in} \rangle$



$| \psi_{in} \rangle \longrightarrow$

$$\mathcal{O}_i(x_{۱})\mathcal{O}_j(x_{۲}) = \sum_k f_{ijk}\mathcal{O}_k(y)$$

$$f_{ijk}(x_{۱}, x_{۲}, y, \partial_y) = C_{ijk}\hat{f}_{ijk}(x_{۱}, x_{۲}, y, \partial_y)$$

$$|x_{۱} - y|, |x_{۲} - y| < \min_{i=۳..n} |x_i - y|$$

میتوان هر تابع همبستگی را بصورت بازگشتی با استفاده از OPE محاسبه کرد به شرط آنکه داده های CFT را بدانیم.

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1)\mathcal{O}_2(x_2)\mathcal{O}_3(x_3)\ldots\mathcal{O}_n(x_n)\rangle$$

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1)\mathcal{O}_2(x_2)\mathcal{O}_3(x_3)\ldots\mathcal{O}_n(x_n)\rangle = \sum_k f_{12k}\langle \mathcal{O}_k(y)\mathcal{O}_3(x_3)\ldots\mathcal{O}_n(x_n)\rangle$$

کوانتش در دو حالت کوانتش صفحات تخت و کوانتش شعاعی انجام میشود.

کوانتش شعاعی

داخل کره واحد $\mathcal{O}_i$ $|\psi\rangle$

انتقال معکوس $x'_i = x_i/x^2$ $\mathcal{O}_i^\dagger$ $\langle\psi|$

$\langle\psi|\psi\rangle$ باید غیر منفی باشد. $\boxed{\text{مثبت معکوس}}$

کوانتش صفحات تخت

$x_1 < 0$ n عملگر محلی $\mathcal{O}_i$ $|\psi\rangle$

$x_1 > 0$ عملگرهای انعکاسی $\mathcal{O}_i^\dagger$ $\langle\psi|$

$\langle\psi|\psi\rangle$ باید غیر منفی باشد. $\boxed{\text{مثبت انعکاسی}}$

کوانتش شعاعی معمولا برای نظریه میدان های همدیس استفاده میشود.

با استفاده از یونیتاری میتوانیم قیدهایی روی CFT data اعمال کنیم.

برای ضرایب عملگرهای حقیقی، یکانی بودن تئوری میتواند قید های حقیقی روی آنها اعمال کند.

$$C_{۱۲۳} \in \mathbb{R}$$

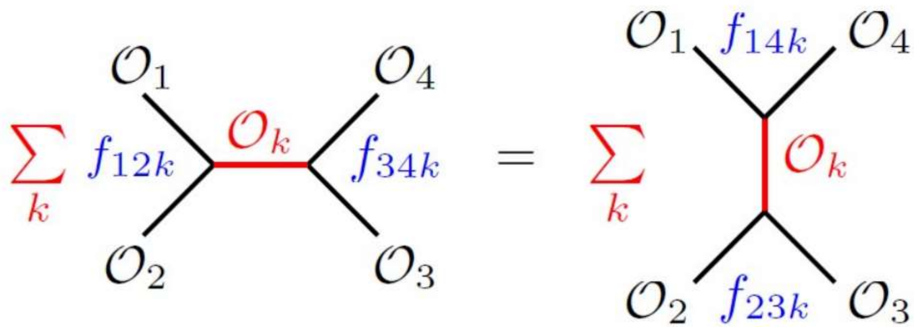
یکانی بودن تئوری یک کران پایین روی Δ میدهد.

$$d = ۳: \qquad \Delta \geq \frac{۱}{۲} \qquad (scalar, j = ۰),$$

$$\Delta \geq ۱ \qquad (smallest, j = \frac{۱}{۲}),$$

$$\Delta \geq j + ۱ \qquad (j > \frac{۱}{۲})$$

اکنون یک تابع چهار نقطه ای را در نظر میگیریم. خواهیم دید که به دو روش متفاوت میتوان آن را بررسی کرد.



$$\langle \mathcal{O}_1(x_1)\mathcal{O}_2(x_2)\mathcal{O}_3(x_3)\mathcal{O}_4(x_4)\rangle = \sum_{\mathcal{O}} \lambda_{12\mathcal{O}}\lambda_{34\mathcal{O}} W_{\mathcal{O}}$$

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1)\mathcal{O}_2(x_2)\mathcal{O}_3(x_3)\mathcal{O}_4(x_4)\rangle = \sum_{\mathcal{O}} \lambda_{14\mathcal{O}}\lambda_{23\mathcal{O}} W_{\mathcal{O}}$$

امواج جزئی همدیس

$$W_{\mathcal{O}} = \hat{f}_{12\mathcal{O}}(x_1, x_2, y, \partial_y)\hat{f}_{34\mathcal{O}}(x_3, x_4, y', \partial'_y)\langle \mathcal{O}(y)\mathcal{O}(y')\rangle$$

$$\mathcal{O}_i(x_1)\mathcal{O}_j(x_2) = \sum_k f_{ijk}\mathcal{O}_k(y)$$

$$f_{ijk}(x_1, x_2, y, \partial_y) = C_{ijk}\hat{f}_{ijk}(x_1, x_2, y, \partial_y)$$

کاستا توانست $W_{\mathcal{O}}$ را به این صورت محاسبه کند.

$$W_{\mathcal{O}} = g^{\Delta_{12},\Delta_{34}}_{\Delta_{\mathcal{O}},\ell_{\mathcal{O}}}(u, v)\mathbf{K}_4$$

https://arxiv.org/abs/1109.6321

$$\langle \mathcal{O}_{\Delta_1}(x_1)\mathcal{O}_{\Delta_2}(x_2)\mathcal{O}_{\Delta_3}(x_3)\mathcal{O}_{\Delta_4}(x_4)\rangle = f(u,v)\mathbf{K}_4$$

$$\boxed{W_{\mathcal{O}} = g^{\Delta_{12},\Delta_{34}}_{\Delta_{\mathcal{O}},\ell_{\mathcal{O}}}(u,v)\mathbf{K}_4}$$

کانفرمال بلاک

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1)\mathcal{O}_2(x_2)\mathcal{O}_3(x_3)\mathcal{O}_4(x_4)\rangle = \sum_{\mathcal{O}} \lambda_{12\mathcal{O}}\lambda_{34\mathcal{O}} W_{\mathcal{O}}$$

$$f(u,v) = \sum_{\mathcal{O}} \lambda_{12\mathcal{O}}\lambda_{34\mathcal{O}} g^{\Delta_{12},\Delta_{34}}_{\Delta_{\mathcal{O}},\ell_{\mathcal{O}}}(u,v)$$

حال میتوانیم با استفاده از روش هایی کانفرمال بلاک را محاسبه کنیم که دو مورد از آن روش ها را مورد بررسی قرار می دهیم.

۱. معادله کازیمیر

$$g_{\Delta,\ell}^{\Delta_{۱۲},\Delta_{۳۴}}(z,\bar{z}) \underset{z,\bar{z}\to ۰}{\sim} \mathcal{N}_{d,\ell}(z\bar{z})^{\frac{\Delta}{۲}} Geg_\ell\left(\frac{z+\bar{z}}{۲\sqrt{z\bar{z}}}\right)$$

عامل بهنجارش

$$\mathcal{N}_{d,\ell} = \frac{\ell!}{(-۲)^\ell (d/۲-۱)_\ell}$$

چندجمله ای گگنبائر

$$Geg_\ell(x) = C_\ell^{(d/۲-۱)}(x)$$

که در آن $\mathcal{C}_{\Delta,\ell}$ ویژه مقدار کازیمیر درجه‌دوم است

$$\mathcal{C}_{\Delta,\ell} = \Delta(\Delta-d) + \ell(\ell+d-۲)$$

حال میتوانیم با استفاده از روش هایی کانفرمال بلاک را محاسبه کنیم که دو مورد از آن روش ها را مورد بررسی قرار می دهیم.

۲. بسط شعاعی برای کانفرمال بلاک ها

از قالب ρ استفاده میکنیم.

$$|\mathcal{O}_1(r,-\mathbf{n})\mathcal{O}_2(r,\mathbf{n})\rangle = r^D|\mathcal{O}_1(r,-\mathbf{n})\mathcal{O}_2(r,\mathbf{n})\rangle$$

$$\langle\mathcal{O}_3(1,\mathbf{n}')\mathcal{O}_4(1,-\mathbf{n}')|$$

- ✓ r^D وابستگی شعاعی را بیان میکند.
- ✓ D مولد اتساع است.

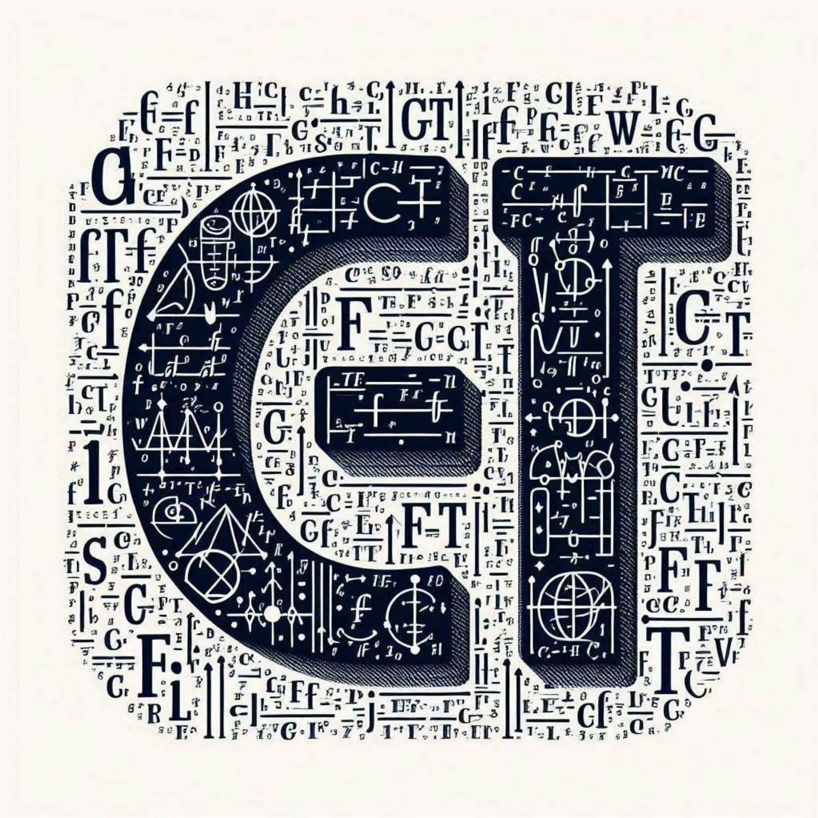
$$g_{\Delta,\ell}^{\Delta_{12},\Delta_{34}}(u,v) = r^{\Delta}\sum_{m=0}^{\infty} r^m \sum_j w(m,j)Geg_j(\eta)$$

$$\sum_{(\hat{m},\hat{j}\in)} c(\hat{m},\hat{j})w(m+\hat{m},j+\hat{j}) = 0$$

ضرایب $c(\hat{m},\hat{j})$ توابع شناخته شده از متغیرهای $m,d,\ell,\Delta,\Delta_{12},\Delta_{34},j$ هستند.

جمع بندی

- معرفی گروه همدیس و آشنایی با ویژگی های آن، مولدها و جبر همدیس در دو بعد و سه بعد به بالا
- تاثیر گروه همدیس بر روی میدان های کلاسیک و کوانتومی
- محاسبه توابع همبستگی دو نقطه ای، سه نقطه ای و چهار نقطه ای



منابع و مراجع

[1] Philippe Francesco, Pierre Mathieu, David Senechal. Conformal field theory. 1997

[2] Qualls, Joshua D. Lectures on conformal field theory. arXiv preprint arXiv:1511.04074, 2015.

[3] Becker K., Becker M., Schwarz J. String Theory and M-Theory. CUP, 2007.

[4] 10/11 PSI - Conformal Field Theory | PIRSA

با سپاس از توجه شما